УДК 62—501.72

В. М. ПЕРЕЛЬМУТЕР,
канд. техн. наук

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Существует много разнообразных методов определения параметров систем управления по измерениям входных и выходных сигналов данных систем, известны также формулы для оценки точности идентификации. И лишь в небольшом количестве работ рассматривается связь идентификации с оптимальным управлением. В то же время в теории и практике идентификации и оптимального управления этот вопрос имеет первостепенное значение [1]. Выбор метода идентификации и его характеристик в каждом конкретном случае следует производить с учетом дальнейшего использования результатов идентификации, в первую очередь, в их связи с показателями качества оптимального управления. В статье рассматривается один из возможных подходов к этой задаче.

При анализе различных методов идентификации необходимо учитывать затраты на ее проведение. В определенных пределах увеличение точности идентификации сопровождается соответствующим ростом затрат, так что может оказаться, что повышение точности установления параметров объекта и связанное с этим уменьшение функции потерь оптимального управления не компенсируют возросших затрат на идентификацию.

Пусть показатель качества системы управления характеризуется некоторым функционалом, например интегральным, который после выполнения операций интегрирования, усреднения и т. п. можно свести к функции потерь $J(c, g)$, где c — вектор параметров управляемого объекта; $c \in C$, а g — вектор параметров регулятора, который выбирается из условия минимизации J. Обозначим $g^* = \varphi(c)$ — оптимальный вектор параметров регулятора. Если плотность распределения $f(c)$ вектора c известна, то средняя величина минимума потерь

$$\overline{J} = \int_C f(c)\, J(c,\ \varphi(c))\, dc. \qquad (1)$$

Если c неизвестно, вектор g выбирается из условия минимума величины

$$\overline{J}_1(g) = \int_G f(c)\, J(c,\ g)\, dc,\ \min_g \overline{J}_1(g) = \overline{J}_1(g^0) = \overline{J}_1^0. \qquad (2)$$

Предположим теперь, что для нахождения c проводится идентификация, причем $D_{c_1} \ll D_{c_0}$, где D_{c_1} — апостериорная ковариационная матрица оценки параметров, а D_{c0} — априорная (для смещенных оценок вместо D_{c_1} используется $D_{c_1} + \Delta m \Delta m^T$, где Δm — вектор смещения). Будем считать, что функция $J(c, g)$ дважды дифференцируема по g, а $\varphi(c)$ дифференцируема по c. Матрица $\partial^2 J/\partial g^2$ с элементами $\partial^2 J/\partial g_i \partial g_j$ положительно определена (например, функция J строго выпукла). Обозначим: $\widetilde{C}$ — оценка c, $M[(\widetilde{C} - c)(\widetilde{C} - c)^T] = D_{c_1}$. Разложим $J(c, \varphi(c))$ в ряд по $\widetilde{C}$ в окрестности c. Учитывая, что при $\widetilde{C} = c$ $\partial J/\partial g = 0$, и пренебрегая членами, содержащими $\widetilde{C} - c$ в степени выше второй, находим, что увеличение критерия, возникающее вследствие неточной идентификации, можно представить в виде

$$\Delta J_2(c) = 0{,}5Sp\left[\varphi'^T(c)\frac{\partial^2 J(c, \varphi(c))}{\partial g^2}\varphi'(c) D_{c_1}\right], \quad (3)$$

где $\varphi'(c) = \frac{\partial \varphi}{\partial c}$. Используя способы, изложенные в [2], можно вычислить величину $\Delta J_2(c)$ в случаях, когда приведенные выше условия не соблюдаются. Средний рост критерия

$$\Delta \bar{J}_2 = \int_G f(c)\,\Delta J_2(c)\,dc. \quad (4)$$

Эффективность идентификации целесообразно характеризовать величиной

$$Э = 1 - \frac{c_1\Delta\bar{J}_2 + c_2}{c_1\Delta\bar{J}_1^0}, \quad (5)$$

где c_1 — удельная стоимость увеличения критерия качества;
c_2 — затраты на идентификацию, включающие в себя стоимость оборудования и его разработки, эксплуатационные расходы и т. п.

Если $Э \leqslant 0$, идентификация нецелесообразна. В зависимости от назначения системы управления величина c_1 может быть существенно различной. Она особенно высока для объектов однократного использования, для которых $\Delta\bar{J}_2$, $\Delta\bar{J}_1^0$ — вероятности невыполнения задачи, c_1 — стоимость изделия. При усложнении метода идентификации (например, применении метода максимального правдоподобия вместо метода наименьших квадратов) в определенных пределах уменьшается величина $\Delta\bar{J}_2$, возрастает c_2. Анализируя эти соотношения, можно остановиться на самом целесообразном в данной ситуации методе идентификации.

Если для идентификации системы на ее входы в процессе функционирования системы необходимо подавать специальные испытательные сигналы $z(t)$, то стоимость c_2 возрастает из-за необходимости применения генераторов этих сигналов и, кроме того, под влиянием $z(t)$, как правило, происходит увеличение функции потерь J. Факторами, влияющими на возрастание функции потерь, являются, например, следующие: повышение энергозатрат на управление, так как управляющий сигнал становится равным $u(t) + z(t)$, где $u(t)$ — основное управление; снижение точности, так как появляются дополнительные флуктуации выхода; уменьшение максимального значения управляющего сигнала $u(t)$, что приводит к ухудшению качества динамической системы, в частности к увеличению длительности переходных процессов и т. п. Рост функции потерь под действием $z(t)$ обозначим ΔJ_z. Тогда

$$Э = 1 - \frac{c_1\Delta\bar{J}_2 + c_1\Delta\bar{J}_z + c_2}{c_1\Delta\bar{J}_1^0}. \quad (6)$$

При увеличении интенсивности $z(t)\,\Delta\bar{J}_2$ уменьшается, так как снижается D_{c_1}, а $\Delta\bar{J}_z$ возрастает. Отсюда видно, что при определенной величине интенсивности может иметь место максимум эффективности. Если в диапазоне возможных изменений дисперсии D_z сигнала $z(t)$ (обеспечивающих условие $D_{c_1} \ll D_{c_0}$)

$$\Delta\bar{J}_2 = \Delta\bar{J}_{20} D_z^{-1}, \quad \Delta\bar{J}_z = \Delta\bar{J}_{z0} D_z,$$

то

$$D_{z_{\text{опт}}} = (\Delta\bar{J}_{20}\Delta\bar{J}_{z0}^{-1})^{1/2}, \quad Э_{\text{макс}} = 1 - \frac{2c_1\,(\Delta\bar{J}_{20}\Delta\bar{J}_{z0}) + c_2}{c_1\Delta\bar{J}_1^0}. \tag{7}$$

Пример. Пусть система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{8}$$

где A, B — матрицы соответствующих размерностей, а функция потерь

$$J = \int_0^{T_\text{р}} (x^T P x + u^T G u)\, dt. \tag{9}$$

Известно [3], что $u^* = -G^{-1}BKx$, где K удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dK}{dt} = -A^T K - KA - P + KBG^{-1}B^T K, \; K(T_\text{р}) = 0. \tag{10}$$

При этом

$$J^* = Sp\left[K(0)\, x_0 x_0^T\right].$$

В такого рода системах сигнал $u(t)$ обычно изменяется достаточно плавно и не позволяет осуществить идентификацию. Поэтому на вход системы в дополнение к $u(t)$ подается сигнал $z(t)$, который должен удовлетворять известным условиям идентифицируемости. Предположим, что $z(t)$ — высокочастотный сигнал, а в цепи обратной связи установлен фильтр, так что $x_z(t)$ — составляющая выхода, вызванная $z(t)$, на выход системы не проходит. Пусть во время работы системы подача $z(t)$ и идентификация проводятся периодически с длительностью одного цикла $T_\text{и}$ при общем времени действия $z(t)$, равном $T'_\text{р}$, $T'_\text{р} \ll T_\text{р}$. После очередного такта $T_ц$ происходит пересчет матрицы усиления K с новыми оценками параметров объекта. Можно записать

$$J = \int_0^{T_\text{р}} (x_u^T P x_\text{и} + u^T G u)\, dt + T'_\text{р} Sp\left[\overline{P x_z x_z^T} + G\overline{z z^T}\right], \tag{11}$$

так как $u(t)$, $z(t)$ независимы. Обозначим

$$\overline{zz^T} = D_z, \quad \overline{x_z x_z^T} = W(D_z),$$

где матрица W зависит от параметров системы и линейно от D_z. Пусть $D_z = \varepsilon D_{z0}$, где D_{z0} фиксировано. Тогда

$$\Delta J_z = T'_{\text{р}} \varepsilon Sp[PW_0 + GD_{z0}] = \varepsilon \Delta J_{z0}, \quad \Delta \overline{J}_z = \varepsilon \Delta \overline{J}_{z0}. \tag{12}$$

Величину ΔJ_2 можно вычислить, используя функции чувствительности [2]. Следует учесть, что после каждого цикла происходит изменение матрицы обратной связи, причем эта матрица, рассматриваемая как функция номера цикла, имеет среднее значение, приближенно определяемое по (10), а отклонения практически взаимно независимы. Соответствующие формулы здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Пусть

$$x' = -cx + u, \quad x(0) = 1, \quad P = 1, \quad u^* = -G^{-1}kx,$$

$$J = 0{,}5\,(G + k^2)(k + cG)^{-1}, \quad k^* = -cG + \sqrt{G + c^2G^2}$$

(считая, что $T_{\text{р}}$ достаточно велико, так что k^* можно найти как стационарное решение (10) [3]), $J(c, k^*) = k^*$. Предполагая, что c распределено равномерно в $[a_-, a_+]$, находим

$$\overline{J} = \frac{1}{a_+ - a_-} \int\limits_{a_-}^{a_+} k^* dc = \frac{G}{2(a_+ - a_-)} \Big[a_-^2 - a_+^2 + a_+ \sqrt{G^{-1} + a_+^2} -$$

$$- a_- \sqrt{G^{-1} + a_-^2} + G^{-1} \ln\Big(\Big(a_+ + \sqrt{G^{-1} + a_+^2}\Big)\Big(a_- +$$

$$+ \sqrt{G^{-1} + a_-^2}\Big)^{-1}\Big)\Big], \quad \overline{J}_1^0 = \frac{1}{a_+ - a_-} \int\limits_{a_-}^{a_+} J(c, k^\circ)\, dc = \tag{13}$$

$$= \frac{G + k^{02}}{2G(a_+ - a_-)} \ln[(a_+G + k^\circ)(a_-G + k^\circ)^{-1}],$$

где k° — величина, минимизирующая $\overline{J}_1^0$. Предположим, что для идентификации используется сигнал $z(t) = z_m \sin \omega t$ и метод функций чувствительности [2]. Для этого метода дисперсия оценки c

$$D_{c_1} = D_\nu \left[\int\limits_0^{T_{\text{и}}} v^2(t)\, dt\right]^{-1} = \frac{2D_\nu (c^2 + \omega^2)}{T_{\text{и}} z_m^2}, \tag{14}$$

где D_ν — интенсивность помехи типа белого шума; $v = \frac{\partial x(t)}{\partial c}$. Для простоты примем $\omega^2 = G^{-1}$. С учетом (12) находим

$$\Delta \overline{J}_z = \frac{0{,}5 z_m^2 \overline{T}'_{\text{р}}}{a_+ - a_-} \int\limits_{a_-}^{a_+} \left(G + \frac{1}{c^2 + \omega^2}\right) dc =$$

$$= \frac{0{,}5 T'_{\text{р}} z_m^2 G}{a_+ - a_-} [a_+ - a_- + G^{-1/2} \operatorname{arc\,tg}(G^{-1/2}(a_+ - a_-)(G^{-1} + a_+a_-)^{-1})]. \tag{15}$$

Для расчета ΔJ интеграл (9) запишем в виде (учитывая, что $Gu^2 = G^{-1}k^2x^2$)

$$J = \sum_{n=1}^{N} \left(1 + G^{-1}k_n^2\right) \int\limits_{(n-1)T}^{nT} x_u^2(t)\,dt, \tag{16}$$

где n — число циклов, после каждого из которых происходит пересчет коэффициента k; T — длительность цикла; $k_n = k^* + \Delta k_n$; $x_u(t)$ на отрезке $[(n-1)T,\ nT]$ можно представить как

$$x_u(\tau) = x_u((n-1)T)\exp\left[-(c + G^{-1}k_n)\tau\right],\ \tau = t - (n-1)T.$$

Зная малость Δk_n, можно записать

$$x_u(nT) = x_0 \exp\left[-(c + G^{-1}k^*)nT\right](1 - G^{-1}\Delta k_1 T)\ \ldots$$
$$(1 - G^{-1}\Delta k_n T).$$

Подставляя $x_u(t)$ в (16), выполняем интегрирование и производим усреднение по k_n, учитывая, что все Δk_l между собой независимы и имеют одинаковую дисперсию:

$$D_k = \left(\frac{\partial k}{\partial c}\right)^2 D_{a_1} = G^2 \frac{k^{*2}}{(k^* + Gc)^2} D_{a_1}. \tag{17}$$

При этом полагаем, что

$$\exp(-2G^{-1}\Delta k_l T) \approx 1 - 2G^{-1}\Delta k_l T.$$

Получаем

$$\Delta J_2 \underset{N\to\infty}{\approx} \frac{x_0^2 G^{-2} D_k T^2 e^{-2AT}}{2A\left(1 - e^{-2AT}\right)},\quad A = G^{-1}k^* + c. \tag{18}$$

Если принять, что AT достаточно мало (т. е. за время $T_р$ идентификация производится достаточно большое число раз), то, интегрируя ΔJ_2 по c, имеем

$$\Delta\bar{J}_2 = \frac{\Delta\bar{J}_{20}}{z_m^2} = \frac{D_\nu G^{-1}}{z_m^2(a_+ - a_-)}\left[\frac{k_-^2 - k_+^2}{2T_и} + \frac{G^{-1}T\left(k_-^3 - k_+^3\right)}{3T_и} + \right.$$
$$\left. + 2T_и^{-1}\left(k_-^2 - k_+^2 + G\ln\frac{G + k_+^2}{G + k_-^2}\right)\right], \tag{19}$$

где

$$k_{+(-)} = -Ga_{+(-)} + \sqrt{G + G^2 a_{+(-)}^2}.$$

Подставляя (13), (15), (19) в (7), устанавливаем $z_{m\,опт}$, $Э_{макс}$. Пусть

$$G = 1,\ a_+ = 0{,}1,\ a_- = 0{,}001, T = T_и = 2,\ T_р' = 20.$$

Находим

$$z_{m\ опт}^2 = 0{,}332 D_\nu^{1/2},\ Э_{макс} = 1 - 20 D_\nu^{1/2} - 1{,}5\,\frac{c_2}{c_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aström K. J., Eykhoff P. System Identification — A Survey.—«Automatica», 1971, № 2, p. 123—162.
2. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении. Л., «Энергия», 1971. 344 с. Авт.: В. И. Городецкий, Ф. М. Захарин, Е. Н. Розенвассер и др.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М., «Машиностроение», 1968. 764 с.

УДК 62—501. 72

Об эффективности идентификации систем управления. Перельмутер В. М. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 35, 1975, с. 41—47.

Рассматривается связь идентификации и оптимального управления. Вводится мера эффективности идентификации, которая учитывает влияние ее результатов на показатель качества при оптимальном управлении системой, а также затраты на ее проведение. Если для идентификации на вход системы подаются испытательные сигналы, то по мере увеличения интенсивности этих сигналов одновременно с ростом точности оценок параметров происходит, как правило, увеличение функции потерь, в связи с чем существует оптимальная интенсивность этих сигналов, соответствующая максимуму эффективности. Приводится пример.

Библиогр. 3.