УДК 621.372.22

Л. Б. БОЛКОВАЯ,
В. А. ДИКАРЕВ,
канд. физ.-мат. наук,
Н. Г. САРНАВСКИЙ,
канд. техн. наук

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДВУХПРОВОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

Цель работы — получение расчетных формул для амплитуд тока и напряжения в двухпроводной неоднородной высокочастотной линии. Известно, что электромагнитные процессы в таких линиях описываются обобщенной системой телеграфных уравнений. При отыскании приближенных формул мы используем аналог метода ВКБ [1, 2], с помощью которого можно получить асимптотические разложения для решений этой системы.

Обобщенная система телеграфных уравнений имеет вид [3]:

$$
\begin{aligned}
-\frac{dU_k}{dx} &= \sum_{i=1}^{n} W_{ki} I_i \\
-\frac{dI_k}{dx} &= \sum_{i=1}^{n} Y_{ki} U_i
\end{aligned}
\qquad (k,\ i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{1}
$$

Здесь n — число ветвей в линии;

I_i, U_i — комплексы силы тока и напряжения;

x — координата длины ($a \leqslant x \leqslant b$),

$$
\begin{aligned}
W_{ki} &= r_{ki} + j\omega m_{ki}.\ k \neq i; \\
W_{ki} &= R_k + j\omega Z_k.\ k = i; \\
Y_{ki} &= g_{ki} + j\omega c_{ki},\ k \neq i; \\
Y_{ki} &= G_k + j\omega C_k,\ k = i,
\end{aligned}
$$

где ω — частота; величины Z_k, C_k, G_k, R_k, c_{ki}, g_{ki}, m_{ki}, r_{ki} характеризуют либо электрические свойства k-й ветви, либо взаимовлияния между k-й и i-й ветвями.

Известно [3], что $m_{ki} = m_{ik}$, $c_{ki} = c_{ik}$, $g_{ki} = g_{ik}$, $r_{ki} = r_{ik}$. Положим $m_{ki} = m_{ik} = m$, $c_{ki} = c_{ik} = c$, $g_{ik} = g_{ki} = g$, $r_{ki} = r_{ik} = r$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Система (1) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dU_1}{dx} &= -\{[R_1(x) + j\omega L_1(x)]\, I_1 + [r(x) + j\omega m(x)]\, I_2\}; \\
\frac{dU_2}{dx} &= -\{[R_2(x) + j\omega L_2(x)]\, I_2 + [r(x) + j\omega m(x)]\, I_1\}; \\
\frac{dI_1}{dx} &= -\{[G_1(x) + j\omega C_1(x)]\, U_1 + [g(x) + j\omega c(x)]\, U_2\}; \\
\frac{dT_2}{dx} &= -\{G_2(x) + j\omega C_2(x)]\, U_2 + [g(x) + j\omega c(x)\, U_1\}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

При получении асимптотических разложений для решения системы (2) ограничимся отысканием нулевого и первого членов асимптотики. Будем использовать процедуру построения асимптотических рядов, описанную в [4].

Систему (2) в матричной форме можно записать так:

$$
\frac{d\vec{X}}{dx} = (A + B\omega)\,\vec{X},
$$

где $\vec{X} = \{U_1(x),\ U_2(x),\ I_1(x),\ I_2(x)\}$ — искомая вектор-функция; A, B — матрицы четвертого порядка, элементы которых есть функции от x, имеющие на отрезке $[a, b]$ непрерывные вторые производные. Матрицы A и B представим как

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_1 & r \\ 0 & 0 & r & R_2 \\ G_1 & g & 0 & 0 \\ g & G_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\quad B = -j \begin{pmatrix} 0 & 0 & L_1 & m \\ 0 & 0 & m & L_2 \\ C_1 & c & 0 & 0 \\ c & C_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Собственные числа матрицы B

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{D_1},\ \lambda_{3,4} = \pm j\sqrt{D_2},$$

где

$$D_1 = \frac{2cm + C_1L_1 + C_2L_2 - \sqrt{(2cm + C_1L_1 + C_2L_2)^2 - 4(C_1C_2 - c^2)(L_1L_2 - m^2)}}{2};$$

$$D_2 = \frac{2cm + C_1L_1 + C_2L_2 + \sqrt{(2cm + C_1L_1 + C_2L_2)^2 - 4(C_1C_2 - c^2)(L_1L_2 - m^2)}}{2}.$$

Нетрудно проверить, что величины D_1, D_2 — положительные.

Величины $\vec{U}_{1,2,3,4}$ и $\vec{Y}_{1,2,3,4}$ — собственные векторы матриц B и B^*, равны соответственно [5]

$$\vec{U}_{1,2,3,4} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ -\frac{1}{\lambda}P_1 \\ -\frac{1}{\lambda}P_2 \end{vmatrix};\ \vec{Y}_{1,2,3,4} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_3 \\ -\frac{1}{\lambda}P_3 \\ -\frac{1}{\lambda}P_4 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где $\lambda = Im\lambda_{1,2,3,4}$; $\lambda^2 - cm - L_2C_2 = V_1$;

$$C_1m + L_2c = V_2;\ cL_1 + c_2m = V_3;$$
$$C_1V_1 + cV_2 = P_1;\ cV_1 + C_2V_2 = P_2;$$
$$L_1V_1 + mV_3 = P_3;\ mV_1 + L_2V_3 = P_4.$$

Асимптотические разложения для решений системы (2) будем искать в виде

$$\vec{X}(x, \omega) = e^{\omega\int\limits_a^b \lambda_i(\tau)d\tau}\left\{\vec{Z}_{i,0}(x) + \frac{\vec{Z}_{i,1}(x)}{\omega} + \ldots + \frac{\vec{Z}_{i,n}(x)}{\omega^n} + 0\left(\frac{1}{\omega^{n+1}}\right)\right\},$$

где $\vec{Z}_{i,n}(x)$, $(n = 0, 1, \ldots)$ искомые вектор-функции. Методика отыскания $\vec{Z}_{i,n}(x)$ описана в [4].

Данное асимптотическое разложение можно строить, отправляясь от любого собственного значения $\lambda_i(x)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. При этом процедура отыскания функций $\vec{Z}_{i,n}(x)$, $(n = 1, 2, 3, 4)$ не зависит от выбора $\lambda_i(x)$. Поэтому далее индекс i будем опускать.

Вектор-функция $\vec{Z}_0(x)$ является собственным вектором матрицы B, а вектор-функция $\vec{Z}_n$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ можно найти, используя рекуррентную формулу

$$\vec{Z}_n' - A\vec{Z}_n = (B - \lambda E)\vec{Z}_{n+1}. \tag{4}$$

Так как ранг матрицы $B - \lambda E$ на единицу меньше ее порядка, то

$$\vec{Z}_n = \vec{Z}_n^\circ + \varphi_n(x)\vec{U}, \tag{5}$$

где $\vec{Z}_n^0$ — какое либо частное решение (4); $\varphi_n(x)$ — скалярная функция.

Чтобы система уравнений (4) имела решения, функция $\varphi_n(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$(\vec{U},\ \vec{Y})\varphi_n' + (\vec{U}',\ \vec{Y})\varphi_n - (A\vec{U}\vec{Y})\varphi_n = (A\vec{Z}_n^0,\ \vec{Y}) - (\vec{Z}_n^0,\ \vec{Y}). \quad (6)$$

Предполагая $\vec{Z}_0^0 \equiv 0$, получаем нулевое приближение

$$\vec{Z}_0 = \varphi_0(x)\vec{U},$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(\vec{U},\ \vec{Y})\varphi_0'(x) + (\vec{U}',\ \vec{Y})\varphi_0(x) - (A\vec{U},\ \vec{Y}) = 0.$$

Решая его, получаем

$$\varphi_0(x) = \exp\int_a^x \frac{(A\vec{U},\ \vec{Y}) - (\vec{U}',\ \vec{Y})}{(\vec{U},\ \vec{Y})}\,d\tau.$$

Тогда

$$\vec{Z}_0 = \varphi_0(x)\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ -\frac{1}{\lambda}P_1 \\ -\frac{1}{\lambda}P_2 \end{vmatrix},$$

где

$$(A\vec{U},\ \vec{Y}) = -\frac{1}{\lambda}\{V_1W_1 + V_3W_2 + P_3W_3 + P_4W_4\},$$

$$(\vec{U},\ \vec{Y}) = V_1^2 + V_2V_3 + \frac{1}{\lambda^2}(P_1P_3 + P_2P_4),$$

$$(\vec{U}',\ \vec{Y}) = V_1V_1' + V_3V_2' - \frac{1}{\lambda^2}(P_5W_5 + P_4W_6),$$

$$W_1 = R_1P_1 + rP_2,\ W_2 = rP_1 + R_2P_2,\ W_3 = G_1V_1 + gV_2,$$

$$W_4 = gV_1 + G_2V_2,\ W_5 = -P_1' + \frac{\lambda'}{\lambda}P_1,\ W_6 = -P_2' + \frac{\lambda'}{\lambda}P_2.$$

Займемся отысканием следующего члена асимптотики:

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_1^0 + \varphi_1(x)\vec{U},$$

$\vec{Z}_1^0$ найдем, решая систему уравнений (4) при $n = 0$. Она имеет вид

$$\vec{Z}_0' - A\vec{Z}_0 = B - \lambda E)\vec{Z}_1^0.$$

Здесь

$$\vec{Z}_0' - A\vec{Z}_0 = \frac{\varphi_0'(x)}{\lambda}\begin{pmatrix}\lambda V_1\\ \lambda V_2\\ -P_1\\ -P_2\end{pmatrix} - \frac{\varphi_0(x)}{\lambda}\begin{pmatrix}W_1+\lambda Y_1'\\ W_2+\lambda V_2'\\ \lambda W_3 - W_5\\ \lambda W_4 - W_6\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\vec{Z}_1^0 = \begin{vmatrix}0\\ j\frac{W_7}{V_1}\\ j\frac{(V_1\alpha_3 - cW_7)}{\lambda V_1}\\ j\frac{(V_1\alpha_4 - C_2W_7)}{\lambda V_1}\end{vmatrix},$$

где $W_7 = m\alpha_3 + L_2\alpha_4 - \lambda\alpha_2$ является частным решением уравнения (7);

$\varphi_1(x)$ должно удовлетворять уравнению

$$\varphi_1'(x)(\vec{Z}_0,\ \vec{Y}) \equiv (A\vec{Z}_0 - \vec{Z}_0',\ \vec{Y}).$$

Решая его, получаем

$$\varphi_1(x) = \int_a^x \frac{(A\vec{Z}_0 - \vec{Z}_0',\ \vec{Y})}{(\vec{Z}_0,\ \vec{Y})}\,d\tau,$$

где

$$P_6 = L_2V_2 + mV_1;\ P_5 = L_1V_1 + mV_2;$$

$$(A\vec{Z}_0 - \vec{Z}_0',\ \vec{Y}) = \frac{1}{\lambda^2}\{[P_5(\lambda W_3 - W_5) + P_6(\lambda W_4 - W_6) -$$

$$-\lambda V_1(W_1 + \lambda V_1') - \lambda V_3(W_2 + \lambda V_2')]\varphi_0(x) + [\lambda^2 V_1^2 +$$

$$+\lambda^2 V_2V_3 + P_1P_3 + \frac{1}{\lambda}P_2P_4]\varphi_0'(x)\};$$

$$(\vec{Z}_0,\ \vec{Y}) = \varphi_0(x)\{V_1^2 + V_2V_3 + \frac{1}{\lambda^2}(P_1P_3 + P_2P_4\}.$$

Таким образом,

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_1^0 + \varphi_1(x)\begin{vmatrix}V_1\\ V_2\\ -\frac{1}{\lambda}P_1\\ -\frac{1}{\lambda}P_2\end{vmatrix}.$$

Полученные формулы дают возможность рассчитывать двухпроводную неоднородную длинную линию с помощью ЭВМ. Точность метода возрастает с увеличением частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., «Мир», 1965. 238 с.
2. Фреман Н., Фреман П. «ВКБ-приближения». М., «Мир», 1967. 168 с.
3. Клейн В. Теория взаимного влияния в линиях связи. М., ИЛ, 1959. 203 с.
4. Дикарев В. А. Многопроводные длинные линии с изменяющимися по длине параметрами. — Сб. «Радиотехника». Вып. 31, Харьков, 1974, с. 23—28.
5. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., «Наука», 1971. 271 с.

УДК 621.372.22

Методика расчета двухпроводной неоднородной линии. Болковая Л. Б., Дикарев В. А., Сарнавский Н. Г. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 35, 1975, с. 119—124.

Получены расчетные формулы, дающие возможность получать нулевой и первый члены асимптотики для решений системы телеграфных уравнений с переменными коэффициентами, которая соответствует двухпроводной неоднородной линии.

Библиогр. 5.