УДК 65. 012

Б. Е. КУХАРЕВ,
канд. техн. наук

ВЫБОР КОМПРОМИССНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ

Разработка и внедрение автоматизированных систем на всех уровнях управления способствуют повышению качества функционирования отдельных производственных комплексов, а также системы народного хозяйства в целом. Качество функционирования системы определяется в основном двумя аспектами управления:

объемом, скоростью и достоверностью обработки информации;

эффективностью методов принятия решений в системе.

В современных условиях масштабы управляемых объектов и затраты на осуществление принятых решений настолько велики, что незначительные отклонения от оптимума зачастую приводят к существенным абсолютным потерям.

Задачи принятия решений в АСУ и других сложных системах отличаются многообразием и сложностью как в постановке, так и в решении. Корректность постановки задачи в большой степени определяется выбором критерия оптимальности. При этом следует руководствоваться положениями, согласно которым функция критерия должна [1] соответствовать цели решения задачи; обладать функциональной полнотой; быть количественной; несложно вычисляться; иметь физический смысл; быть чувствительной к переменным параметрам задачи.

Однако на практике для сложных технических и технико-экономических задач чрезвычайно трудно (если возможно) выбрать такой критерий, который удовлетворял бы всем поставленным требованиям. Наиболее трудно согласовать требования функциональной полноты и физического смысла. Это объясняется тем, что каждый критерий, имеющий физический смысл, характеризует альтернативные решения только с одной стороны (со стороны своего показателя) и, следовательно, функциональной полнотой обладает только совокупность всех критериев, существенных для конкретной задачи. Назовем такие критерии локальными.

Многокритериальные задачи целесообразно решать на основании принципа эффективность — стоимость, предусматривающего выбор такого решения, которое максимизирует эффективность и минимизирует затраты. Для реализации этого принципа необходимо однозначно установить, какие категории составляют понятие эффективности и какие — затрат, а также, как эти критерии, имеющие различную природу и единицы измерения, соотносятся между собой.

Независимо от метода выбора решения в многокритериальной ситуации оно должно принадлежать области Парето, т. е.

такому подмножеству допустимого множества решений, любое и которых не может быть улучшено одновременно по всем локальным критериям. Для выбора одного решения из множества Парето необходимо составить некоторую схему компромисса. Решение, выбранное в соответствии с ней, будем называть компромиссным.

В работах [2, 3, 4] проведен обзор методов решения многокритериальных задач. Если исключить тривиальный случай, когда все локальные критерии, кроме одного, наиболее существенного, переводятся в систему ограничений и решение отыскивается как оптимум этого критерия, все методы можно условно объединить в две группы. К первой относятся те, которые имеют методику или определённые принципы решения задачи, но не проводится численной оценки эффективности полученного решения, а его полезность оценивается эвристически. Однако отсутствие оценки решения не позволяет сделать заключение о степени целесообразности его и об отсутствии лучших решений. Ко второй группе относятся методы выбора решений с помощью некоторых обобщенных или глобальных критериев. Эти методы являются более перспективными при условии, что глобальный критерий полностью отражает требования к компромиссному решению, т. е. является математической моделью принципа эффективность — стоимость.

Среди принципов решения многокритериальных задач наибольшее распространение получила теория аддитивной полезности и, в частности, метод суммирования локальных критериев, взвешенных по одной шкале с помощью весовых коэффициентов. При этом принимается, что функция полезности локального критерия линейна относительно значений самого критерия. Однако в общем случае это не соответствует действительности. Кроме того, аддитивный глобальный критерий не предъявляет требований к соотношению значений локальных критериев в искомом компромиссном решении, так как в суммарной оценке глобального критерия их оценки неразличимы.

Область допустимых решений задачи можно представить непрерывной или дискретной моделью:

$$\Omega \begin{cases} f_j(\bar{x}) \gtreqless B_j, \ (j = 1,2 \ldots k), \\ f_j(\bar{x}) = B_j, \ (j = k+1, \ldots m). \end{cases} \qquad (1)$$

Если наиболее важным моментом формулирования оптимизационной задачи является выбор критерия оптимальности, то для многокритериальной задачи тот же вопрос стоит на более высоком уровне — необходимо выбрать систему локальных критериев. Такой выбор может быть проведен экспертами, однако в некоторых ситуациях представляется целесообразным и возможным формализовать этот этап на основании анализа области допустимых решений задачи Ω, что позволит более объективно подойти к данному вопросу.

Представим многокритериальную задачу в виде подсистемы в иерархической системе многоуровневой оптимизации. Такая подсистема имеет вход, модель управляемого процесса и выход. Входом этой подсистемы является вектор с компонентами B_j из (1). Это директивные задания и ресурсы, предоставляемые управляющей подсистемой для их выполнения, а также наличные ресурсы. Модель процесса включает набор функции $f_j(\bar{x})$ из (1). Выход представляет собой вектор $\bar{x}^*$, соответствующий цели решения задачи.

Если определить цель как желаемый результат деятельности в соответствии с принципом эффективность—стоимость, то эффективность зависит от того, насколько улучшены директивные показатели, характеризующие нижнюю границу эффективности, а затраты обусловливаются степенью использования ресурсов. Нижние границы эффективности и верхние границы затрат определены компонентами вектора $\bar{B}$ в системе (1). Следовательно, для выбора компромиссного решения в глобальный критерий необходимо включить в качестве локальных критериев k функций из данной системы, которые соответствуют ограничениям B_j со знаком неравенства, поскольку улучшение этих показателей желательно. Остальные $(m-k)$ ограничений не требуют для себя локальных критериев, так как не имеют свободы выбора.

Изложенный подход в выборе локальных критериев отражает действительную картину, существующую в иерархических системах управления, так как подсистема более высокого уровня управляет подчиненными подсистемами с помощью планируемых им ограничивающих показателей. Кроме того, этот подход реализует общепринятую концепцию о том, что цель функционирования нижележащих уровней иерархии является лишь средством для достижения цели вышележащего уровня.

Глобальный критерий в многокритериальной задаче должен формулироваться на основе функций, характеризующих полезность решений по локальным критериям. Практика показывает, что функция полезности локального критерия в общем случае является нелинейной относительно самого критерия, причем иногда существенно. В реальных задачах любой критерий имеет некоторый более или менее явно выраженный порог, за которым дальнейшее его улучшение не приводит к существенному приращению полезности. Поэтому математическая форма, характеризующая функцию полезности локального критерия, должна отражать указанное качество. Кроме того, функция полезности должна удовлетворять следующим требованиям [5]:

а) независимость от вида функции локального критерия;

б) безразмерность;

в) стандартность диапазона изменения;

г) монотонность, так как полезность не может уменьшаться по мере улучшения значений критерия;

д) инвариантность к виду оптимума (максимум или минимум).

Все множество значений локального критерия

$$f_j\ (\bar{x}_j^0) = \underset{\bar{x} \in \Omega}{\text{ext}}\ f_j\ (\bar{x}) \tag{2}$$

включает три подмножества: подмножество допустимых значений, находящихся в диапазоне между ограничением B_j из (1) и оптимальным значением в условиях задачи $f_j\ (\bar{x}_j^0)$, и два подмножества недопустимых и недостижимых значений, находящихся слева и справа от этого диапазона. Очевидно, что функция полезности имеет смысл лишь на подмножестве допустимых значений.

Введем нормированную функцию локального критерия, линейную по отношению к значениям критерия (2):

$$L_j\,(\bar{x}) = \frac{f_j\,(\bar{x}) - B_j}{f_j\,(\bar{x}_j^0) - B_j}\,. \tag{3}$$

Значения этой функции находятся в диапазоне [0,1], если значения критерия (2) лежат в диапазоне $[B_j,\ f_j\ (\bar{x}_j^0)]$.

Пусть полезность локального критерия $P\ \ [f_j\ (\bar{x})] = P_j\ (\bar{x})$ изменяется в диапазоне [0,1] при изменении функции $L_j\ (\bar{x})$ также в диапазоне [0,1]. Тогда определим функцию потери оптимальности

$$R_j\,(\bar{x}) = 1 - P_j\,(\bar{x}) \tag{4}$$

в виде

$$R_j\,(\bar{x}) = \left[\frac{1 - L_j\,(\bar{x})}{1 + L_j\,(\bar{x})}\right]^{\mu_j}. \tag{5}$$

Функция (5) характеризует полезность локального критерия и удовлетворяет всем перечисленным требованиям. Коэффициент μ_j назовем коэффициентом полезности локального критерия, поскольку он определяет характер изменения полезности данного критерия на области Ω. Значения $\mu_j \geqslant 1$, причем более важным критериям соответствуют меньшие значения μ и самому весомому из них — $\mu = 1$. Для него функция полезности наиболее близка к линейной характеристике относительно $f_j\ (\bar{x})$. Для менее существенных критериев (при больших μ) характеристика (5) имеет более явно выраженную нелинейность. График функции $R(\bar{x})$ при различных μ приведен на рис. 1.

Значения коэффициентов μ_j локальных критериев, а следовательно, и вид их функций полезности могут быть получены с помощью экспертных оценок. При выборе этих коэффициентов для регулярно решаемых задач, по которым имеется статистика принимаемых решений, целесообразно воспользоваться методами статистического анализа.

Глобальный критерий должен отражать цель функционирования системы, которая характеризуется двумя тенденциями — стабилизации и развития (роста) [6]. Иными словами, возможны два крайних случая: система стремится либо к максимальной устойчивости, либо к получению максимального эффекта. В реальных системах они уравновешиваются в некотором соотношении. Поэтому модель глобального критерия должна включать параметр, регулирующий соотношение этих тенденций, т. е. она должна представлять целый спектр критериев, границами которого являются рассмотренные крайние случаи.

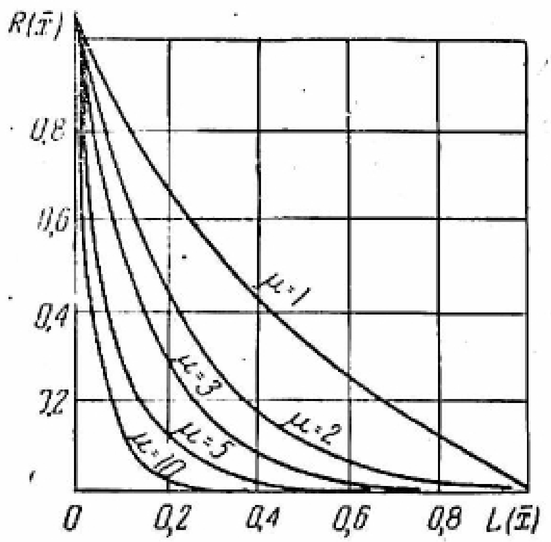

Рис. 1.

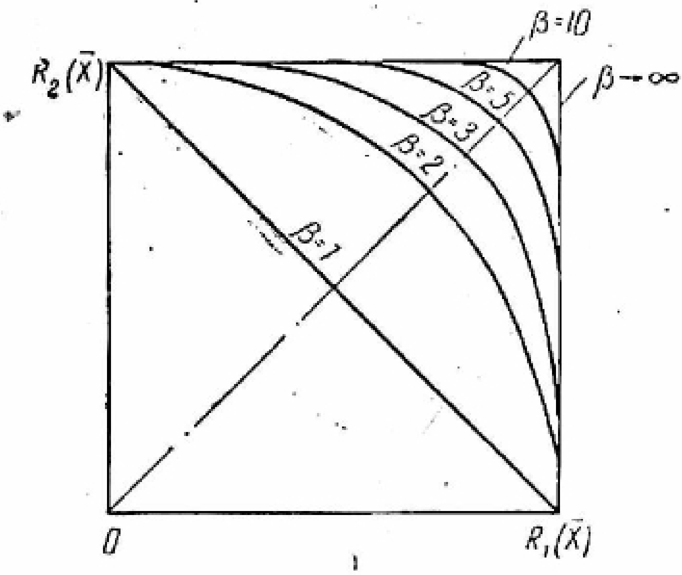

Рис. 2.

Глобальный критерий, удовлетворяющий изложенным требованиям, имеет вид

$$Q(\bar{x}^*, \beta) = \min_{\bar{x}\in\Omega} \left[\frac{\sum_{j=1}^{k} R_j^{\beta}(\bar{x})}{k} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \tag{6}$$

где $\bar{x}^*$ — искомое компромиссное решение, принадлежащее области Парето;

β — коэффициент соотношения тенденций стабилизации и развития.

Значения $Q(\bar{x}, \beta)$ находятся в диапазоне $[0,1]$ для решений $\bar{x} \in \Omega$.

Коэффициент β принимает значения в диапазоне $[1, \infty]$. В одном крайнем случае при $\beta = 1$ критерий является аддитивной функцией от потерь оптимальности $R_j(\bar{x})$:

$$Q(\bar{x}^*, \beta = 1) = \min_{\bar{x}\in\Omega} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} R_j(\bar{x}) \right]. \tag{7}$$

В пространстве, образованном функциями потери оптимальности $R_j(\bar{x})$, он представляет собой гиперплоскость.

На рис. 2 приведена для плоского случая геометрическая интерпретация функции глобального критерия (6) при различных β (без учета влияния величины k в формуле). Из рисунка видно, что при $\beta = 1$ на критерий (6) не влияет соотношение потерь оптимальности по локальным критериям и требуется лишь их общая минимизация. Однако при увеличении β предъявляются все более жесткие требования к тому, чтобы потери оптимальности были близки друг к другу даже за счет увеличения их суммарной оценки. Эти требования становятся самыми жесткими в пределе при $\beta \to \infty$. Такая форма (при $\beta \to \infty$) соответствует другому крайнему случаю глобального критерия. Можно доказать, что этот случай эквивалентен минимаксном критерию [5, 7]

$$Q(\overline{x}^*, \beta \to \infty) = \min_{\overline{x} \in \Omega} \max_{j} R_j(\overline{x}), \quad (8)$$

который минимизирует максимальные потери оптимальности по локальным критериям. Его значение в компромиссном решении соответствует максимальному из значений $R_j(\overline{x}^*)$. Рис. 3 иллюстрирует на гипотетической области допустимых решений V, которая является отображением области Ω, какие решения выбираются глобальным критерием (6) из области Парето при различных β. Область Парето в данном случае представлена границей S.

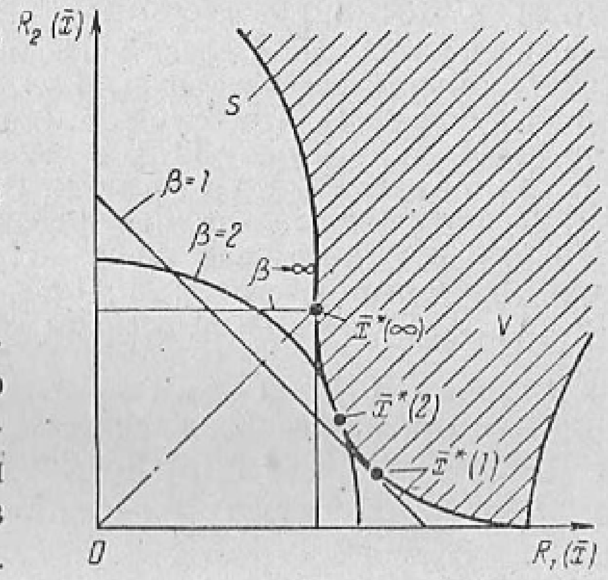

Рис. 3.

Глобальный критерий (8) соответствует тенденции максимальной устойчивости решения к возмущающим факторам, так как отдает предпочтение решениям $\overline{x}^*$, наиболее удаленным от границ области. В то же время для критерия (7) характерна тенденция к получению максимального эффекта, так как минимизируются суммарные потери и не предъявляются требования к их соотношению. С учетом этого критерий (7) обычно выбирает компромиссное решение на границе области или вблизи нее, что может привести к его неустойчивости.

В реальных задачах коэффициент β должен выбираться в диапазоне $[1, \infty]$ в соответствии с требованиями к устойчивости и к качеству искомого решения. Для этого на практике можно воспользоваться соотношением

$$\beta = \frac{\ln k}{\ln k - \ln[(k-1)\alpha + 1]}, \quad (9)$$

где α — «вес» тенденции устойчивости; $(1 - \alpha)$ — «вес» тенденции получения максимального эффекта в задаче.

Предложенный глобальный критерий (6) может быть использован в любых оптимизационных задачах при наличии количественных локальных критериев. Его достоинствами являются использование нелинейных функций полезности локальных критериев, а также возможность на этапе формулирования задачи предъявлять требования к устойчивости компромиссного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуд Г. Х., Макол Р. Э. Системотехника. Введение в проектирование больших систем. М., «Сов. радио», 1962. 384 с.
2. Озерной В. М. Принятие решений.— «Автоматика и телемеханика», 1971, № 11, с. 106—121.
3. Ларичев О. И. Человеко-машинные процедуры принятия решений.— «Автоматика и телемеханика», 1971, № 12, с. 130—142.
4. Борисов В. И. Проблемы векторной оптимизации. В сб.: Исследование операций. М., «Наука», 1972, с. 72—91.
5. Кузьмин И. В., Кухарев Б. Е. Принципы принятия решений в многоальтернативных задачах при условии векторного критерия. Тезисы докл. 2-й Всесоюз. науч.-техн. конф. «Проблемы науч. организации управления соц. пром-стью». Сб. № 7, М., 1972, с. 168—179.
6. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М., «Мир», 1971. 536 с.
7. Кузьмин И. В., Дедиков Э. А., Кухарев Б. Е. Метод построения глобального критерия в задачах математического программирования.— «Механизация и автоматизация управления», 1971, № 6, с. 11—12.

УДК 65. 012

Выбор компромиссного решения в условиях многокритериальности. Кухарев Б. Е. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 35, 1975, с. 6—12.

Рассматривается проблема принятия решения в задачах с векторным критерием. Предлагается формальный подход к формированию системы локальных критериев и на их основе конструирования глобального критерия. Функция глобального критерия представляет собой спектр критериев, на границах которого находится аддитивный и минимаксный спектры.

Ил. 3. Библиогр. 7.