УДК 519.28

В. А. ПОПОВ, канд. техн. наук,
М. Л. ЛИТВИНОВ,
А. Л. ЛИТВИНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ И ЭРЛАНГОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

При исследовании функционирования сложных автоматизированных систем на основе моделей систем массового обслуживания более тщательный учет вида входного потока и потока обслуживания существенно сказывается на точности получаемых характеристик [1]. Если временные интервалы между приходом соседних заявок входного потока имеют значительный разброс относительно среднего значения, то такие потоки хорошо описываются с помощью гиперэкспоненциального распределения.

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с ожиданием, на которую поступает поток случайных заявок с гиперэкспоненциальной функцией распределения времени m-го порядка

$$A(t) = 1 - \sum_{i=1}^{m} a_i e^{-\lambda_i t}, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i = 1. \tag{1}$$

Время обслуживания поступающих заявок имеет эрланговское распределение k-го порядка

$$B(t) = 1 - \sum_{=1}^{k} \frac{(\mu t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\mu t}. \tag{2}$$

Пусть

$$\bar{\lambda} = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\lambda_i}\right]^{-1}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{k} -$$

средние интенсивности потоков, описываемых соответственно распределениями (1) и (2), а $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ — преобразования Лапласа — Стилтьеса этих распределений.

Если $\bar{\mu} > \bar{\lambda}$, то для установившегося режима рассматриваемой системы существует функция распределения времени ожидания, для нахождения которой используется метод составления интегрального уравнения Линдли [2]. Соответствующее факторизационное уравнение имеет вид

$$\gamma(s) = \frac{K+(s)}{K-(s)} = \alpha(-s)\beta(s) - 1 = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^k \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i - s} - 1.$$

Заметим, что функция

$$B(s) = \frac{\mu^k}{(\mu+s)^k} = \frac{P_0(s)}{P_k(s)} \tag{3}$$

является отношением двух многочленов, нулевой и k-й степени. Тогда можно записать [3], что преобразование Лапласа—Стилтьеса от $F(t)$

$$\varphi(s) = \frac{P_k(0)}{P_k(0) \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{s}{q_i}\right)},$$

где q_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ — корни уравнения $\gamma(s) = 0$ (4)
в левой полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$.

Воспользовавшись (3), получим

$$\varphi(s) = \frac{(\mu+s)^k}{\mu^k \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{s}{q_i}\right)}. \tag{5}$$

Положим $s = \mu(z-1)$, тогда уравнение (4) перепишется

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu(1-z)} - z^k = 0. \tag{6}$$

Докажем, что уравнение (6) имеет k корней в круге $|z| < 1$ (включая кратные). Найдем значения модулей обеих членов уравнения (6) на границе области $|z| = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \to +0$. Воспользовавшись формулой Тейлора, получим

$$|-z|^k = (1-\varepsilon)^k = 1 - k\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu(1-z)} = 1 - \mu\varepsilon \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\lambda}.$$

Так как $\bar{\mu} > \bar{\lambda}$, то

$$k < \mu \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\lambda_i},$$

т. е. на границе области $|z| = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \to +0$,

$$|-z^k| > \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu(1-z)} \right|.$$

Тогда, согласно теории Руше, внутри области

$$|z| = 1, \ (-z^k) \ \text{ и } \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \lambda_i}{\lambda_i + \mu(1-z)} - z^k \right)$$

имеется одинаковое число нулей, равное k. Обозначим их z_1, z_2, ..., z_k. Воспользовавшись (5), получим

$$q_i = \mu(z_i - 1), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Так как $|z_i| < 1$, то q_i лежат в $\operatorname{Re} s < 0$. Окончательно получим

$$\varphi(s) = (\mu + s)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{(z_i - 1)}{[\mu(z_i - 1) - s]}. \tag{7}$$

Взяв обратное преобразование Лапласа—Стилтьеса от (7), получим

$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\prod\limits_{l=1}^{k} (z_l - 1) z_i^k}{(1 - z_i) \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\prod\limits_{l=1}^{k} (z_l - z_i)}{(z_j - z_i)}} e^{-\mu(1-z_i)t}.$$

Среднее время ожидания в очереди

$$\bar{t}_{\text{ож}} = -\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu(1 - z_i)} - \frac{k}{\mu}.$$

Дисперсия времени ожидания в очереди

$$\sigma^2_{\text{ож}} = m_2 - \bar{t}^2_{\text{ож}}, \tag{8}$$

где m_2 — второй начальный момент времени ожидания

$$m_2 = \varphi''(0).$$

Найдя m_2 и подставив в (8), после преобразований получим

$$\sigma^2_{\text{ож}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu^2 (1 - z_i)^2} - \frac{k}{\mu^2}.$$

Среднее число требований в очереди

$$L_q = \bar{t}_{\text{ож}} \bar{\lambda} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu(1 - z_i)} - \frac{k}{\mu}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\lambda_i}}.$$

Среднее число требований в системе

$$L = \bar{t}_{\text{ож}} \mu = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k(1 - z_i)} - 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чумаченко В. Ф., Попов В. А., Литвинов М. Л.* Расчет характеристик цифровых вычислительных систем ХВКИУ, Харьков, 1971. 130 с.
2. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966. 420 с.
3. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966. 241 с.

УДК 519. 28

Исследование системы массового обслуживания с гиперэкспоненциальным входным потоком и эрланговским распределением времени обслуживания. Попов В. А., Литвинов М. Л., Литвинов А. Л. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 165—168.

Исследуется однолинейная система массового обслуживания с ожиданием, на которую поступает гиперэкспоненциальный поток случайных заявок. Время обслуживания распределено по закону Эрланга.

Для стационарного состояния решением интегрального уравнения Линдли получены характеристики функционирования системы.

Библиогр. 3.