УДК 62—50
В. Ф. ШОСТАК,
канд. техн. наук,
Ю. Б. ЛЕВИЦКИЙ,
М. Д. БОРЯЧОК

КООРДИНАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОДЗАДАЧ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ СЛОЖНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Сложность решения задач оптимизации систем управления непрерывными технологическими процессами определяется большой размерностью задач, взаимосвязанностью технологических параметров участков и агрегатов, наличием локальных критериев функционирования подсистем и другими факторами, присущими сложным системам.

Математическое описание непрерывных процессов, представляющих собой комплекс последовательно соединенных агрегатов, часто приводит к следующей задаче линейного программирования со ступенчатой структурой матрицы ограничений:
максимизировать линейную фурму

$$Z = p_1^T x_1 + p_2^T x_2 + \ldots + p_N^T x_N \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &A_2 x_1 + A_2 x_2 \leqslant a_1; \\ &\qquad \bar{A}_2 x_2 + A_3 x_3 \leqslant a_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\bar{A}_{N-1} x_{N-1} + A_N x_N \leqslant a_N; \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ \ldots\ x_N \geqslant 0, \tag{3}$$

где A_i — матрицы коэффициентов, которые определяются моделью объекта;

x_i — векторы, характеризующие параметры материальных потоков (величина потока, концентрация, температура и т. д.);

p_i^T — вектор-строки безразмерных весовых коэффициентов выражающих стоимостные зависимости параметров материальных потоков;

a_i — вектор-столбцы, определяющие конструктивные, технологические и др. ограничения;

N — число агрегатов в технологическом комплексе;

$i = \overline{1, N}$.

Ступенчатость матрицы ограничений обусловлена тем, что параметры материального потока на выходе одного комплекса (агрегата) являются основной составной частью входных параметров для последующего комплекса.

Переменные, являющиеся общими для двух соседних матриц ограничений, представляют собой векторы взаимодействия между соответствующими комплексами (агрегатами).

Эффективным методом решения сложных задач большой размерности является, как известно, метод разложения (декомпозиции) большой задачи на ряд относительно простых подзадач оптимизации подсистем первого уровня и координации этих подсистем на втором уровне. В качестве управляемых подсистем первого уровня могут рассматриваться отдельные агрегаты или совокупности агрегатов.

При этом необходимо выполнять условия постулата совместимости подзадач, сформулированного в работе [1], и условия аддитивности общего критерия эффективности функционирования системы по отношению к локальным критериям подсистем

$$Z = \sum_{i=1}^{N} Z_i. \tag{4}$$

В результате декомпозиции задача (1) — (3) может быть представлена в виде совокупности следующих подзадач первого уровня:
максимизировать линейную форму

$$Z_i = p_i^T x_i + p'^T_{i+1} x_{i+1} \tag{5}$$

при ограничениях

$$A_i x_i + A_{i+1} x_{i+1} \leqslant a_{i+1} \tag{6}$$

$$x_i \geqslant 0;\ x_{i+1} \geqslant 0,\ i = \overline{1,\ (N-1)},$$

где p'^T_{i+1} определяется из соотношения

$$p_i^T = p'^T_i + p''^T_i. \tag{7}$$

Каждая из таких подзадач соответствует выделенной при декомпозиции подсистеме, для которой (5) является локальной функцией цели, а (6) — ограничениями, накладываемыми на переменные i-й подсистемы.

Геометрически каждую подзадачу можно представить в виде многогранника, определяющего область допустимых решений данной подзадачи. Область, образованная пересечением многогранников подзадач, представляет собой также многогранник и является областью допустимых решений общей задачи.

Подзадача координации состоит в согласовании векторов взаимодействия подсистем первого уровня, найденных в результате решения подзадач оптимизации.

Подзадачи координации и оптимизации подсистем образуют, как показано в [1, 2], иерархическую двухуровневую структуру.

Решение подзадач первого уровня может быть получено известными методами линейного программирования, так как размерность этих задач относительно невелика.

Методы решения подзадачи координации линейных подсистем в настоящее время разработаны недостаточно. Широко известный метод декомпозиции Данцига-Вольфа, как указано в [2], не использует иерархическую структуру решения подзадач, что не позволяет реализовать существенные достоинства этой структуры.

Координация линейных подзадач имеет существенные отличия по сравнению с нелинейными задачами [1], которые можно сформулировать следующим образом.

Решение задачи координации всегда находится на границах многогранников, соответствующих допустимым областям решения подзадач первого уровня.

В случае, если области допустимых решений выпуклы, то значение $Z_{\max}$, соответствующее общему решению задачи, всегда меньше или равно сумме значений $\overset{*}{z}_{i\max}$ в решениях первого уровня

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{N} \overset{*}{z}_{i\max}. \qquad (8)$$

Общее решение задачи может быть получено из решений подзадач первого уровня, если области допустимых решений выпуклы и векторы взаимодействия x_k подсистем согласуются путем перемещения по l_r-м граням, удовлетворяющим условиям

$$\min_{\substack{r \in R_i \\ i \in \overline{1, N}}} \left| \frac{\partial z_i}{\partial l_r} \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_k} \right|, \qquad (9)$$

где R_i — множество сторон многогранника, ограничивающего область допустимых решений i-й подзадачи первого уровня.

На основании изложенных особенностей координации линейных подзадач можно построить двухуровневый алгоритм решения линейных задач оптимизации сложных объектов большой размерности.

1. Исходя из матрицы ограничений (2), выделяются подзадачи первого уровня (5)—(7).

2. Производится решение подзадач первого уровня по правилам симплекс-метода.

3. Вычисляются значения рассогласования переменных взаимодействия подзадач первого уровня.

4. Выделяются ограничения (грани многогранников), которые содержат координаты взаимодействия и проходят через вершины многогранников, соответствующие решениям подзадач первого уровня.

5. Производится упорядочение ограничений, выделенных в п. 4, по величине

$$\left| \frac{\partial z_i}{\partial l_r} \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_k} \right|.$$

6. На грани, удовлетворяющей условию (9), вычисляется крайняя точка многогранника, ближайшая к решению соответствующей локальной подзадачи.

7. Вычисляется норма рассогласования соответствующих координируемых переменных в крайней точке п. 6.

8. Сравниваются нормы вектора рассогласований координируемых переменных п. 3 и п. 6. Если значение нормы в п. 6 меньше, чем в п. 3 и все знаки составляющих этих векторов одинаковы, то крайняя точка, найденная в п. 6, рассматривается в качестве нового решения подзадачи и осуществляется переход к п. 5 с учетом этой точки.

Если значение нормы в п. 6 больше чем в п. 3 и все знаки векторов одинаковы, то рассмотренное ограничение вычеркивается из рассмотрения и производится переход к п. 5. Если все знаки векторов рассогласования п. 3 и п. 6 различны, то в качестве решения принимается точка рассогласования грани при значениях взаимодействия, найденных при решении соседних подзадач и осуществляется переход к п. 5 с учетом этой точки.

9. Сравнивается норма рассогласования координируемых переменных с величиной допустимой погрешности расчета.

Если все нормы рассогласований лежат в допустимых пределах, то производится печать результатов и останов.

Основные преимущества рассмотренного алгоритма состоят в том, что решение общей задачи получается в результате решения ряда относительно простых подзадач первого уровня и координации их переменных взаимодействий. Подзадачи первого уровня могут решаться независимо и одновременно.

Изложенный алгоритм существенно отличается от алгоритмов Данцига-Вольфа тем, что производится декомпозиция общей функции цели, а также переменных векторов взаимодействия, координация которых производится на втором уровне.

Найти

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2, \quad -1 &\geqslant 0,\\ -2x_1 + x_2, \quad +6 &\geqslant 0,\\ -x_1 + x_2, \quad +2{,}5 &\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_2 - x_3 - 1 &\geqslant 0,\\ -4x_2 - x_3 + 8 &\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \mathrm{II}$$

$$x_1 \geqslant 0; \ x_2 \geqslant 0; \ x_3 \geqslant 0.$$

Выделить локальные функции подсистем

$$z_1 = x_1 + x_2; \ z_2 = x_2 + x_3.$$

Решение подзадачи I блока;

$$x_1^{\mathrm{I}} = 3\frac{2}{3}; \quad x_2^{\mathrm{I}} = 1\frac{1}{3}; \quad \max z_1 = 5.$$

Решение подзадачи II блока;

$$x_2^{\mathrm{II}} = 0{,}9; \quad x_3^{\mathrm{II}} = 4{,}4; \quad \max z_2 = 5{,}3.$$

Рассогласование координируемого воздействия,

$$\delta_1 = 1\frac{1}{3} - 0{,}9 = 0{,}4.$$

Выделить ограничения, проходящие через точки решения,

$$\mathrm{I}\begin{cases} l_1 = x_1 - 2x_2 - 1 \geqslant 0, \\ l_2 = -2x_1 + x_2 + 6 \geqslant 0, \end{cases} \quad \mathrm{II}\begin{cases} l_4 = 6x_2 - x_3 - 1 \geqslant 0, \\ l_5 = -4x_2 - x_3 + 8 \geqslant 0. \end{cases}$$

Упорядочение ограничений, выделенных в п. 4 по величине:

$$\left|\frac{\partial z_i}{\partial l_r} \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_k}\right|; \qquad \begin{matrix} l_1 = 3; & l_4 = 7; \\ l_2 = 1{,}5; & l_5 = 3. \end{matrix}$$

Вычисление координаты крайней точки, ближайшей к решению задачи,

$$\overset{*}{x}_2 = 1.$$

Вычисление нормы рассогласования,

$$\delta_2 = \overset{*}{x}_2 - x_2^{\mathrm{II}} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1,$$

Сравнение нормы рассогласования,

$$\delta_1 > \delta_2 = 0{,}4 > 0{,}1.$$

Определить значения переменных, подставляя значение $\overset{*}{x}_2$ (п. 7) в те ограничения, в которых достигается $\min \left|\frac{\partial z_i}{\partial l_r} \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_k}\right|$ из l_2 определяем x_1, из $l_5 - x_3$,

$$x_1 = 3{,}5; \; x_2 = 1; \; x_3 = 4.$$

Определить значение общей функции цели,

$$\max Z = 3{,}5 + 2 \cdot 1 + 4 = 9{,}5.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шостак В. Ф.* Оптимизация сложных объектов в автоматизированных системах управления с иерархической структурой. — В сб.: «Децентрализованные методы управления». МДНТП, М., 1972, с. 87—94.
2. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М., «Мир», 1973. 344 с.

УДК 62—50

Координация линейных подзадач в двухуровневой структуре решения сложной задачи оптимизации. Шостак В. Ф., Левицкий Ю. Б., Борячок М. Д. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 161—165.

В работе рассматривается метод решения задач линейного программирования со ступенчатой структурой матрицы ограничений. Производится декомпозиция большой задачи на ряд подзадач с последующей координацией решений подзадач.

Библиогр. 2.