УДК 62—504.5
В. Ф. КАНАРСКИЙ,
канд. техн. наук,
Н. И. САМОЙЛЕНКО,
О. П. АЛЕКСЕЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСЕВОГО «СКЛЕИВАНИЯ» В ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При формировании информационных массивов в условиях функционирования АСУ актуальной задачей является поиск путей формализации процессов создания и обработки информационных массивов с целью минимизации затрат машинного времени. Представляя процесс обработки информационных массивов как конечный автомат [1], поставим задачу разработки элементов синтеза конечных автоматов с заданной логикой. Для построения логической структуры автомата с минимальным количеством логических элементов необходимо минимизировать логическую функцию автомата.

Известные методы минимизации логических функций позволяют сравнительно легко произвести синтез автоматов, на вход которых поступает небольшое число переменных. В частности, простой и распространенный метод карт Вейча, обладающий большой наглядностью, позволяет получить минимальную дизъюнктивную нормальную форму логической функции не более чем от четырех переменных [2, 3]. Если число переменных будет порядка десяти и более, то минимизация логических функций по существующим методам требует значительных затрат сил и времени. Необходимо искать новые методы получения минимальной дизъюнктивной нормальной формы логических функций.

Рассмотрим конечный автомат с двоичной входной логикой, определяемой конечным множеством входных переменных $X = \{x_i\}$, где $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и выходной k-значной логической функции

$$L(X) = [L_0(X),\ L_1(X),\ \ldots,\ L_{k-1}(X)]. \tag{1}$$

Полагаем, что логическая функция принимает значения 0 или 1,

$$L(X) = [L_0(X) = 0,\ L_1(X) = 1]. \tag{2}$$

Однако все положения предлагаемого метода определения минимальной дизъюнктивной нормальной формы могут быть показаны и для k-значной выходной логической функции.

Для построения логической структуры автомата целесообразно рассматривать выражение (2) в виде

$$L(X) = [L_0(X) = 0] \tag{3}$$

или

$$L(X) = [L_1(X) = 1]. \tag{4}$$

Условимся логическую функцию $L(x)$ называть функцией первого порядка, $L(x_1,\ x_2)$ — второго порядка, а в общем случае для $L(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — n-го порядка.

Сущность предлагаемого метода заключается в построении графа-дерева по заданной логической функции и дальнейшей минимизации логической функции способом «склейвания» конечных вершин дерева. Основой метода является то, что каждой логической функции соответствует только одно дерево и наоборо. [4].

Дерево (рис. 1) включает $(n+1)$ ярусов. Каждый ярус состоит из одноименных вершин, причем вершины 1, 2, 3, 4, ..., n-го ярусов соответствуют переменным, а вершины $(n+1)$-го яруса соответствуют значениям логической функции, которые на дереве

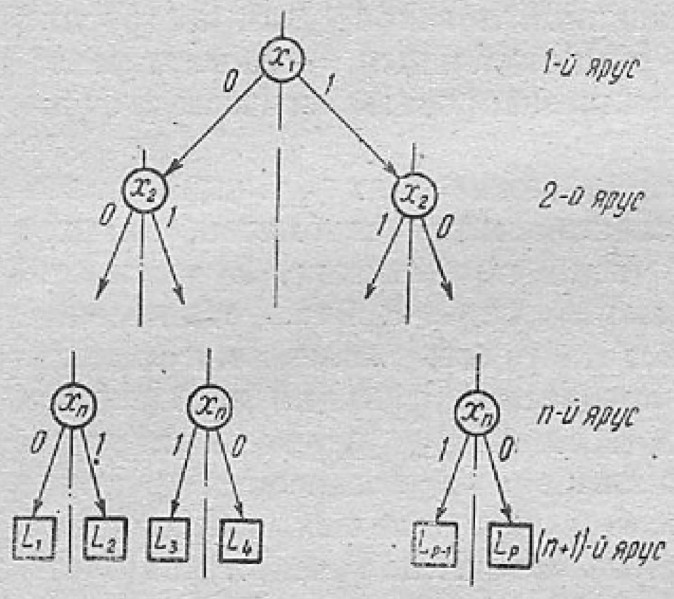

Рис. 1.

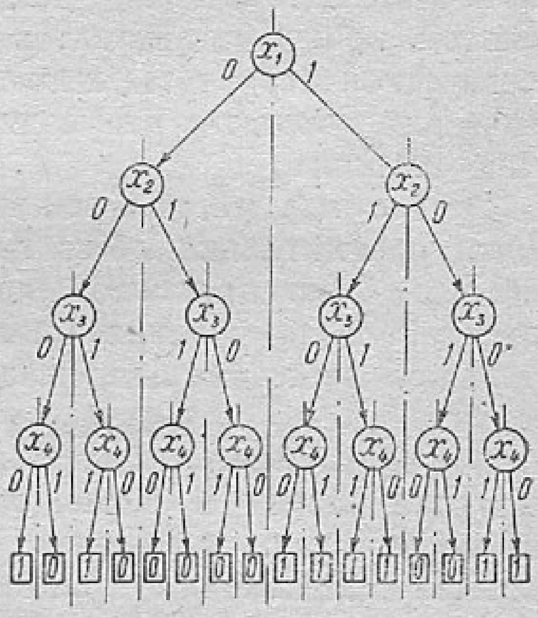

Рис. 2.

изображены квадратами. Из каждой неконечной вершины x_i выходят две стрелки (ребра графа), которые в соответствии со значением переменной x_i получают индекс 0 или 1. Такая индексация стрелок проставляется строго относительно осевой симметрии. Стрелки, выходящие из вершины x_i $(i=2, 3, \ldots, n)$, индексируются относительно оси, проходящей через вершину x_{i-1}, при этом все крайние левые стрелки дерева имеют индекс 0.

Путь от начальной вершины до конечной по направлению стрелок соответствует определенному набору переменных. Дерево исчерпывает все возможные наборы переменных.

После построения дерева переходим непосредственно к процессу «склеивания» всех конечных вершин со значением логической функции-1. Правом «склеиться» обладают те «единичные» вершины, которые имеют симметрию относительно осей, проходящих через узловые вершины. Узловой вершиной для двух конечных является вершина, в которой расходятся пути от начальной вершины дерева к рассматриваемым конечным. Так, вершина L_1 может быть «склеена» с вершинами L_2, L_4, ..., L_{2m}, ..., L_p, где $m = 1, 2, \ldots, \log_2 p$, а $p = 2^n$.

Логическое выражение для «склеенных», или симметричных вершин упрощается. Оно не будет содержать переменной x_i, где $i = 1, 2, \ldots$ Этой переменной на дереве соответствует одноименная вершина x_i, через которую проходит ось симметрии.

Для дальнейшего упрощения логического выражения нужно проверить наличие осевой симметрии уже для двух «склеенных» вершин. Если такая симметрия окажется, то логическое выражение упростится еще на одну переменную и т. д.

Рассмотрим метод осевого «склеивания» на примере минимизации конкретной логической функции четвертого порядка.

x_1	x_2	x_3	x_4	$L(X)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Пусть задана логическая функция (см. таблицу). Совершенная дизъюнктивная нормальная форма данной логической функции, согласно выражению (4), имеет вид

$$L(X) = \sum_{j=1}^{8} l_j(X) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4x_1x_2x_3x_4. \quad (5)$$

Дерево для данной логической функции изображено на рис. 2.

Процесс «склеивания» рекомендуется начинать с крайнего левого квадрата проверкой на наличие «1». Затем (при наличии «1») проверяем его осевую симметрию остальным «единичным» квадратам относительно осей, проходящих через вершины, которые входят в обратный путь «проверяемый квадрат — начальная вершина дерева».

В нашем случае крайний левый квадрат содержит «1» и имеет симметрию относительно оси, проходящей через вершину x_1. Следовательно, этот квадрат имеет право на «склеивание» с симметричным ему квадратом. «Склееным» квадратам соответствует минимизированное логическое выражение

$$l_{1\min} = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4. \quad (6)$$

Рассмотренное «склеивание» двух конечных вершин дерева идентично упрощению, которое мы можем получить при помощи формул упрощения логических выражений:

$$l_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4(\bar{x}_1 + x_1);$$

$$\bar{x}_1 + x_1 = 1;$$

$$l_{1\min} = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4. \quad (7)$$

Следующий «единичный» квадрат не имеет осевой симметрии. Логическое выражение для данного квадрата имеет вид

$$l_{2\min} = l_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_2 x_4. \tag{8}$$

Очередной «единичный» квадрат имеет симметрию относительно оси, проходящей через вершину x_4. Теперь проверяем осевую симметрию для двух симметричных квадратов и обнаруживаем ее относительно оси, проходящей через вершину x_3. В данном случае мы имеем право «склеить» четыре квадрата. Получим следующее логическое выражение:

$$l_{3\min} = x_1 x_2. \tag{9}$$

Аналогично

$$l_{4\min} = x_1 \bar{x}_3. \tag{10}$$

Теперь имеется возможность записать минимизированную логическую функцию в следующем виде:

$$L_{\min}(X) = \sum_{j=1}^{4} l_{j\,\min} = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_3.$$

Таким образом, получена минимальная дизъюнктивная форма логической функции (11), которая значительно упрощена относительно исходного выражения (5).

Аналогично данному примеру метод осевого «склеивания» можно рассмотреть на примерах минимизации логических функций более высокого порядка. Предложенный метод минимизации логических функций обладает следующими преимуществами:

наглядность;

алгоритм минимизации логических функций не зависит от порядка минимизируемой функции;

на дереве указаны все возможные наборы переменных, что позволяет устранить процесс запоминания значений переменных при расстановке значений логической функции или составления добавочных таблиц соответствия;

предложенный метод реализуется на ЭВМ, причем одна программа может быть использована для минимизации логических функций любого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темников Ф. Е.* и др. Теоретические основы информационной техники. М., «Энергия», 1971. 424 с.
2. *Рабинович А. Н.* Системы управления автоматических машин. Киев, «Техніка», 1973. 440 с.
3. *Алексенко А. Г.* Основы микросхемотехники. М., «Сов. радио», 1971. 352 с.
4. *Василенко Ю. А.* Многозначные структуры. Изд-во Ужгородск. ун-та, 1972. 148 с.

УДК 62—504. 5

Применение метода осевого «склеивания» в задачах минимизации логических функций. Канарский В. Ф., Самойленко Н. И., Алексеев О. П. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 155—158.

Задаче упрощения логических выражений отводится важное место в вопросах синтеза конечных автоматов с заданной логикой. Метод осевого «склеивания» позволяет получить минимальную дизъюнктивную форму булевых функций путем построения графа-дерева по заданной логической функции и дальнейшей минимизации логической функции способом «склеивания» конечных вершин дерева.

Рассматривается конкретный пример получения минимальной дизъюнктивной нормальной формы логической функции четырех аргументов методом осевого «склеивания».

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр. 4.