УДК 681.335
Н. Я. КАКУРИН,
канд. техн. наук,
А. К. БАРИНОВ

МНОГОЗНАЧНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Назначением цифровых функциональных преобразователей является реализация определенных функциональных зависимостей

$$— y = \sin x;\ z = x + y;\ y = \log_2 x \text{ и т. п.}$$

Различают три вида цифровых функциональных преобразователей (ЦФП): арифметические, табличные и цифро-аналоговые.

Арифметическим ЦФП свойственна значительная начальная стоимость элементов, медленно возрастающая с увеличением сложности задач [1]. Табличные ЦФП строят на основе постоянных запоминающих устройств [2], поэтому расчленение задачи в табличных ЦФП останавливается на более высоком уровне функций одной и двух переменных.

Функции большего числа переменных реализуются путем суперпозиции. С помощью табличных ЦФП трудно получить такую же универсальность, как с помощью арифметических ЦФП.

Зато эквивалентное быстродействие табличных ЦФП в случае использования одних и тех же элементов больше на один-два порядка по сравнению с арифметическими ЦФП. Это объясняется тем, что одно функциональное преобразование эквивалентно большому количеству элементарных операций. Высокое быстродействие, экономичность, повышенная надежность и помехоустойчивость табличных ЦФП обусловлены особенностями их основных узлов — цифровых функциональных преобразователей.

Структура ЦФП существенно зависит от вида записи и в случае фиксированной запятой значительно проще.

В отличие от двоичных ЦФП [1], у которых независимая переменная и функция представляются двоичными числами, рассмотрим способы построения и оценки аппаратурных затрат многозначных ЦФП, построенных на многозначных запоминающих и логических элементах.

МЦФП функции одной переменной для случая фиксированной запятой

Пусть функция одной переменной $y=f(x)$ представлена в числовой форме таким образом, что x и y меняются в пределах k и l m-ричных разрядов.

Функцию можно записать в m-ричной системе исчисления в виде

$$y_l \ldots y_2 y_1 = f(x_k, \ldots x_2, x_1), \tag{1}$$

где x_k и y_l — старшие разряды x и y, x_1 и y_1 — младшие разряды x и y.

Каждый разряд y в общем случае зависит от всех разрядов x, поэтому левую часть формулы следует записать так:

$$y_l(x_k, \ldots, x_2, x_1) \ldots y_2(x_k, \ldots, x_2, x_1) \times$$
$$\times\, y_1(x_k, \ldots, x_2, x_1) = f(x_k, \ldots x_2, x_1). \tag{2}$$

Поскольку в m-ричной системе исчисления разряды x, как и разряды y, могут принимать m значений, то каждому из разрядов y_j в формуле (2) отвечает определенная моделирующая этот разряд многозначная логическая функция (МЛФ) $\varphi_j = \varphi_j(\upsilon_k, \ldots, \upsilon_2, \upsilon_1)$ от k аргументов. Что касается разрядов x, то очевидно, что любому коду $x_k \ldots x_2 x_1$ всегда можно поставить в соответствие набор многозначных аргументов $\upsilon_k, \ldots, \upsilon_2, \upsilon_1$, который совпадает с этим кодом.

Таким образом, нахождение разряда y_j сводится к нахождению МЛФ φ_j, моделирующей разряд y_j функции $f(x_k \ldots x_2 x_1)$.

Представив МЛФ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) в системе Россера — Тьюкетта, получим в общем случае следующую формулу для

$$y_j = \bigvee_{j=0}^{m^k-1} F_j \cdot f(\alpha_k, \ldots, \alpha_2, \alpha_1), \tag{3}$$

где $F_j = \varphi_{\alpha_k}(x_k) \ldots \varphi_{\alpha_2}(x_2)\, \varphi_{\alpha_1}(x_1)$;

$\varphi_{\alpha_i}(x_i)$ — характеристическая функция системы Россера-Тьюкетта;

$f(x_k, \ldots, x_2, x_1)$ — значение функции $y_j = f(x_k \ldots x_2 x_1)$ на наборе аргументов $\alpha_k \ldots \alpha_2 \alpha_1$.

Пример. Записать формулу, моделирующую функциональное преобразование $Y = F(X)$, заданное табл. 1. Значность логики $n = 10$.

Таблица 1

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4

Таблица 2

x_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
y_1	0	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4

Так как аргумент X изменяется в пределах $0 \leqslant X \leqslant 10$, а $0 \leqslant Y \leqslant 4$, то для представления X достаточно иметь два десятичных разряда x_2 и x_1, а для представления функции $F(X)$ — один десятичный разряд y_1 (табл. 2).

В системе многозначных логических операций Россера-Тьюкетта y_1 запишется в виде

$$\begin{aligned} y_1 = {} & 1\varphi_0(x_2)\varphi_1(x_1) \vee 1\varphi_0(x_2)\varphi_2(x_1) \vee \\ & \vee 2\varphi_0(x_2)\varphi_3(x_1) \vee 2\varphi_0(x_2)\varphi_4(x_1) \vee \\ & \vee 3\varphi_0(x_2)\varphi_5(x_1) \vee 3\varphi_0(x_2)\varphi_6(x_1) \vee \\ & \vee 3\varphi_0(x_2)\varphi_7(x_1) \vee 3\varphi_0(x_2)\varphi_8(x_1) \vee \\ & \vee 4\varphi_0(x_2)\varphi_9(x_1) \vee 4\varphi_1(x_2)\varphi_0(x_1). \end{aligned}$$

Для записи y_j можно использовать и минимальные дизъюнктивные нормальные формы МЛФ, но и формула (3) является уже конструктивной, позволяющей определить структуру преобразователя.

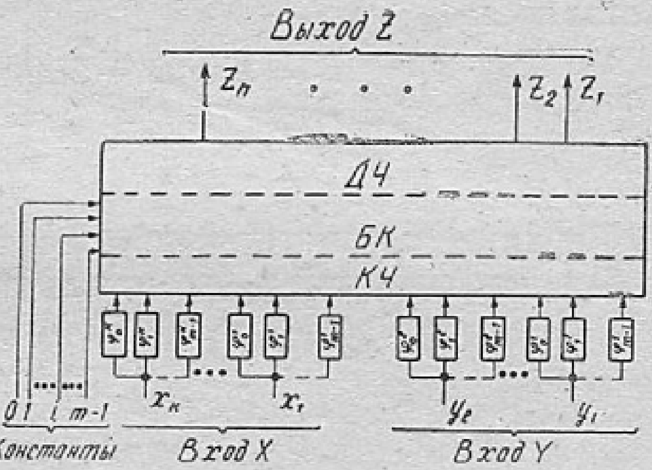

Рис. 1.

Устройство, предназначенное для реализации совокупности булевых функций (3), будем называть многозначным функциональным преобразователем для функции одного аргумента (МЦФП 1).

Структура МЦФП1 полностью определяется формулой (3).

В МЦФП1 (рис. 1) входит набор элементов, реализующих все характеристические функции $\varphi_i(x)$, и логическая сеть (ЛС), состоящая из конъюнктивной (КЧ) и дизъюнктивной (ДЧ) частей.

Разряды входной переменной x поступают на вход МЦФП1. Характеристические функции подаются на вход КЧ, где образуются конъюнкции характеристических функций F_j. В дальнейшем в ДЧ образуются дизъюнкции конъюнкций вида (3). Блок констант БК необходим для образования выражений вида $F_j f(\alpha_k, \ldots, \alpha_2, \alpha_1)$.

Для оценки различных структур МЦФП будем использовать на уровне структурного синтеза верхние математические оценки сложности структур.

Эти оценки определяются возможным количеством K переменных, связанных знаком конъюнкции, количеством D дизъюнктивных членов, объединенных знаком дизъюнкции, и количеством X характеристических функций, необходимых для реализации совокупности МЛФ. Формула (3) и рис. 1 дают возможность оценить сложность структуры МЦФП1.

Заметим прежде, что в системе Россера-Тьюкетта нет необходимости в реализации нулевых значений функций. Примем, что вероятность реализации любого из m значений функций одинакова. Это тем более справедливо, чем большее количество функций необходимо реализовать, т. е. чем больше l.

Таким образом, в среднем количество дизъюнктивных членов в одной функции равно $\frac{m-1}{m} m^k = (m-1) m^{k-1}$. Поэтому $D = l (m - 1) m^{k-1}$.

Количество конъюнктивных членов определяется из тех соображений, что для реализации совокупности МЛФ могут потребоваться все возможные m^k конъюнкций.

Однако в БК не требуется реализовать нулевые значения функции. Таким образом, средняя математическая оценка МЦФП1 составляет

$$\left.\begin{aligned} K &= k \cdot m^k + 2l (m-1) m^{k-1}; \\ D &= l (m-1) m^{k-1}; \\ X &= m \cdot k. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Верхние математические оценки получим из условия, что любая из функций y_l не принимает нулевых значений. Тогда

$$\left.\begin{aligned} K_b &= km^k + 2lm^k \\ D_b &= lm^k; \\ X_b &= mk. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) очевидно, что сложность МЦФП1 зависит от l, m и особенно от k.

МЦФП2 функции двух переменных

Функцию двух переменных (см. рис. 2) $Z = f(x, y)$, представленную так, что x, y и Z изменяется в пределах соответственно k, l и n m-ричных разрядов, можно записать в m-ричной системе счисления в виде

$$Z_n \ldots Z_2 Z_1 = f(x_k \ldots x_2 x_1,\ y_l \ldots y_2 y_1). \qquad (6)$$

Наибольшее возможное количество значений Z_l и нулевое, равно $m^k m^l = m^{k+l}$. Это значит, что каждый разряд Z_l состоит из m^{k+l} элементов, принимающих значения $0, 1, \ldots m - 1$. Такое же количество элементов имеют МЛФ от $k + l$ аргументов.

Аналогично формуле (3) МЛФ Z_l любого разряда Z можно записать так

$$Z_l = \bigvee_{j=0}^{j=m^{k+l}} \Phi_j f(\alpha_k, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \sigma_l, \ldots, \sigma_2, \sigma_1), \qquad (7)$$

где

$$\Phi_j = \varphi_{\alpha_k}(x_k) \ldots \varphi_{\alpha_2}(x_2) \varphi_{\alpha_1}(x_1) \varphi_{\sigma_l}(y_l) \ldots \varphi_{\sigma_2}(y_2) \varphi_{\sigma_1}(y_1).$$

Устройство, предназначенное для реализации МЛФ вида (7) или любого другого вида, который модулирует функцию (6), называется многозначным цифровым функциональным преобразователем для функции двух аргументов (МЦФП2).

Сравнивая формулы (3) и (7), нетрудно убедиться в идентичности структур МЦФП1 и МЦФП2.

Разница состоит в большем количестве входных переменных. По аналогии с МЦФП1 для МЦФП2 получим средние математические оценки в виде

$$K = (k + l)\, m^{k+l} + 2n\,(m - 1)\, m^{k+l-1};$$
$$D = n\,(m - 1)\, m^{k+l-1}; \quad (8)$$
$$X = m\,(k + l).$$

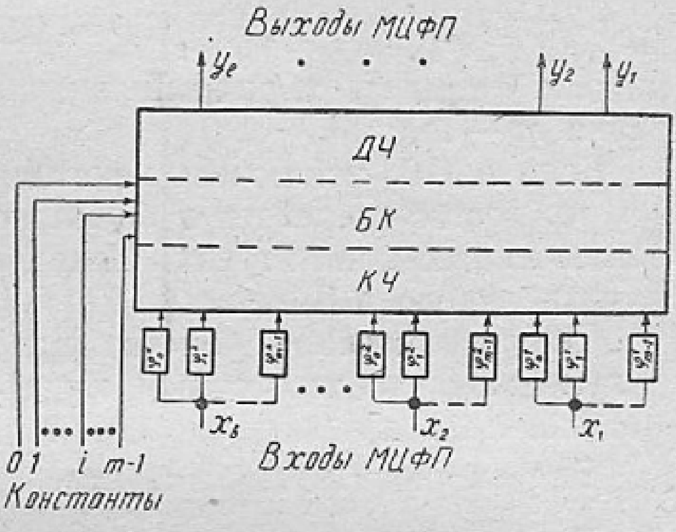

Рис. 2.

Верхние математические оценки МЦФП2 запишем следующим образом:

$$K_b = (k + l)\, m^{k+l} + 2nm^{k+l};$$
$$D_b = nm^{k+l}; \quad (9)$$
$$X_b = m\,(k + l).$$

Очевидно, что многозначными функциями и аргументами принципиально возможно промоделировать функцию любого числа аргументов. Однако возможность такого моделирования ограничивает то обстоятельство, что количество m-ричных аргументов и длина МЛФ возрастают с увеличением числа переменных. Поэтому на каждый аргумент для $m = 2$ можно отвести не более $4 - 5$ разрядов ($k = l = 4 \div 5$).

Таким образом, точность введения в МЦФП2 независимых переменных невысока и, следовательно, невысокой будет точность вычисления Z.

Все же этот метод можно использовать на практике, так как часто по условию задачи одна из переменных принимает только несколько значений, тогда как вторую можно ввести с достаточной точностью.

Для моделирования Z можно использовать МЛФ от количества аргументов, не превышающего количества разрядов x или y. В основе этого метода лежит отображение функции двух аргументов семейством функций одного аргумента. Если значение $y = y_1$ постоянно, то функция двух аргументов превращается в функцию одной переменной $Z = f\,(x,\ y_1)$.

Заставляя y принимать все m^l значений, получим семейство из m^l кривых, полностью отображающих функцию двух аргументов. Так как каждая функция зависит от одной переменной x, то для ее моделирования используют МЛФ от k аргументов.

Рассмотрим структуру МЦФП2, построенного по данному способу.

Многозначную логическую функцию, тождественную $m-1$, условно можно считать зависящей от всех k аргументов $x_k, \ldots, x_2, x_1$ и записать в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) в виде дизъюнкции всех m^k многозначных конституент;

$$Z = f(x, y) = F_0 \vee F_1 \vee \ldots \vee F_i \vee \ldots \vee F_{m^k-1} = m-1, \quad (10)$$

где $F_i = \varphi_{\alpha_k}(x_k) \ldots \varphi_{\alpha_2}(x_2)\, \varphi_{\alpha_1}(x_1)$ — многозначная конституента (индекс i при F_i m-ричный эквивалент набора, на котором F_i равна $m-1$).

Если в (10) исключить некоторые многозначные конституенты, то тождество перейдет в функцию, равную нулю на наборах исключенных конституент. Исключением конституент можно получить любую МЛФ.

Если исключение конституент проводить с помощью второго аргумента y, то тем самым будет решена задача выбора МЛФ, необходимых для моделирования разрядов Z.

Введем ряд функций $\tau_{j_0}, \tau_{j_1}, \ldots, \tau_{j_{m^k-1}}$, зависящих от $y_l, \ldots, y_2, y_1$. Функции имеют следующую особенность: $\tau_{j_0} = Z_j$ только на тех наборах, на которых конституента F_0 является импликантой j-го разряда Z; $\tau_{j_1} = Z_j$ на наборах, где конституента F_1 является импликантой Z_j и т. д.

Тогда МФЛ Z_j можно записать

$$Z_j = F_0 \tau_{j_0} \vee F_1 \tau_{j_1} \vee \ldots \vee F_i \tau_{j_i} \vee \ldots \vee$$

$$\vee F_{m^k-1} \tau_{j_{m^k-1}} = \bigvee_{i=0}^{i=m^k-1} F_i \tau_{j_i}. \quad (11)$$

МЛФ τ_{ji} запишем в дизъюнктивной нормальной форме в системе Россера-Тьюкетта;

$$\tau_{ji} = \bigvee_{j=0}^{j=m^l-1} \varphi_{\sigma_l}(y_l) \ldots \varphi_{\sigma_2}(y_2)\, \varphi_{\sigma_1}(y_1)\, Z_j(\alpha_i, \sigma_j) =$$

$$= \bigvee_{j=0}^{j=m^l-1} L(j)\, Z_j(\alpha_i, \sigma_j), \quad (12)$$

где $L(j)$ — многозначная конституента $y_l, \ldots, y_2, y_1$; j — номера наборов соответственно $y_l, \ldots, y_2, y_1$ и $x_k, \ldots, x_2, x_1$, на которых $L(j) = m-1$; α_i, σ_j — наборы аргументов; $Z_j(\alpha_i, \sigma_j)$ — значение функции Z_j на наборах α_i, σ_j.

Воспользовавшись формулами (11) и (12), запишем Z_j в следующем виде

$$Z_j = \bigvee_{i=0}^{i=m^k-1} F_i \left[\bigvee_{j=0}^{j=m^l-1} L_j Z_j(\alpha_i, \sigma_j) \right]. \quad (13)$$

Структура МЦФП2, построенного по формуле (13), приведена на рис. 3.

Из формулы (13) и рис. 3 можно получить верхнюю математическую оценку сложности структуры МЦФП2. Легко видеть, что блоки F_i и L_j являются полными многозначными дешифраторами. Будем считать, что они выполнены по матричному способу. Блок БК необходим для образования многозначных конъюнкций вида $L_j Z_j(\alpha_i, \sigma_j)$; $Z_j(\alpha_i, \sigma_j)$ может принимать m различных значений от 0 до $m-1$. Так как функции $Z_j(\alpha_i, \sigma_j)$ и $Z_n(\alpha_i, \sigma_j)$, моделирующие различные разряды Z, в общем случае различны, то в блоке БК необходимо образовать всевозможные конъюнкции L_j и константы $0, 1, \ldots, m-1$. Учитывая, что $0 \leqslant y \leqslant m^l - 1$, получим сложность блока БК

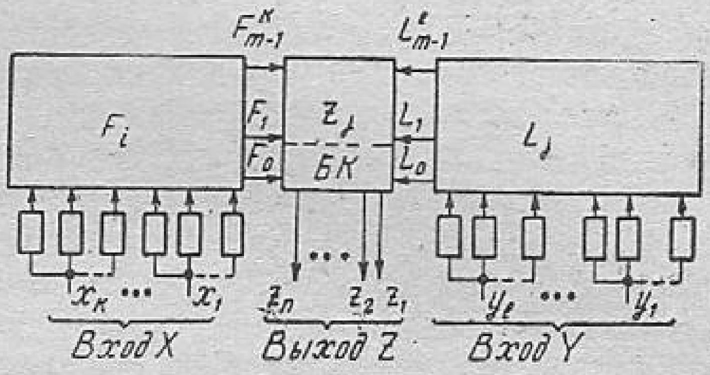

Рис. 3.

$$K_{БК} = 2m^l m = 2m^{l+1}. \quad (14)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} K_b &= km^k + lm^l + 2m^{l+1} + nm^k; \\ D_b &= n(m^{k+l} + m^k); \\ X_b &= m(k+l). \end{aligned} \quad (15)$$

Оценку (15) можно уменьшить, если учесть, что в блоке БК достаточно образовать произведение каждого из выходов блока L_j не на m, а на $m-2$ константы.

Вследствие известных тождеств многозначной логики $0 \cdot x = 0$ и $(m-1)x = x$ нет необходимости в образовании произведений констант 0 и $(m-1)$ на члены L_j.

С учетом этого получим

$$K_b = km^k + lm^l + 2(m-2)m^l + nm^k.$$

Оценки D_b и X_b не изменяются.

Сравнивая формулы (15) и (9), легко заметить преимущество МЦФП2, построенного по формуле (15), перед МЦФП2, построенного по формуле (9). Например, для $k = l = n = 3$ и $m = 4$

$$\frac{K_b(9)}{K_b(15)} \approx 45; \ \frac{D_b(9)}{D_b(15)} = 0{,}98; \ \frac{X_b(9)}{X_b(15)} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобраницький Ю. П. Олефір Ф. П.* Цифрові функціональні перетворювачі. Київ. «Техніка», 1971. 116 с.
2. *Майоров С. А., Новиков Г. И.* Структура цифровых вычислительных машин. Л., «Машиностроение», 1970. 480 с.

УДК 681. 335

Многозначные цифровые функциональные преобразователи. Какурин Н. Я. Баринов А. К. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 107—113.

Показаны способы построения многозначных цифровых функциональных преобразователей в системе Россера-Тьюкетта. Приведены верхние математические оценки сложности структур многозначных цифровых функциональных преобразователей.

Табл. 2. Ил. 3. Библиогр. 2.