УДК 62:50:62—505

В. В. МАЛЫЙ,
В. М. МИХАЙЛЕНКО,
канд. техн. наук

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ ОДНИМ КЛАССОМ СЛОЖНЫХ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ

Ограничимся рассмотрением таких сетевых систем, топологическая структура которых адекватна связному ориентированному графу Y. Каждому элементу графа поставлены в соответствие две переменные состояния $x = \{q_i;\ h_i : i \in \{l\}\}$, один управляющий параметр $u = \{\gamma_i : i \in \{l\}\}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. Значения динамической функции состояния $x^g(t)$ не выходят за пределы области $\Omega[x(t)]$, зависящей от характера квазистационарной функции состояния $x(t)$ в момент времени t, т. е.

$$x^g(t) \in \Omega[x(t)],\ \forall t \in [t_н;\ t_k], \tag{1}$$

где

$$\Omega[x(t)] = \{x(t) : x^н(t) \leqslant x(t) \leqslant x^в(t)\};$$

$$x^н(t) = x(t) - [\operatorname{diag} a_i]\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|;$$

$$x^в(t) = x(t) + [\operatorname{diag} a_i]\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|.$$

2. Значения квазистационарной функции $x(t)$ в любой момент времени t удовлетворяют трем постулатам сетей

$$\begin{gathered} f_j^{\mathrm{I}} = f_j^{\mathrm{I}}[q(t)] = 0, \quad j \in I_{\mathrm{I}}; \\ f_j^{\mathrm{II}} = f_j^{\mathrm{II}}[h(t)] = 0, \quad j \in I_{\mathrm{II}}; \\ f_j^{\mathrm{III}} = f_j^{\mathrm{III}}[q(t);\ h(t);\ \gamma(t)] = 0, \quad j \in I_{\mathrm{III}}. \end{gathered} \tag{2}$$

В работе [1] показано, что задача управления выделенным классом сетей сводится к рекуррентной последовательности подзадач, соответствующих временным интервалам, в пределах которых произведена линейная аппроксимация математической модели. Каждая такая подзадача формулируется следующим образом: необходимо минимизировать функцию цели $P(\tau)$ при условии, что переменные

$$\partial t(\tau),\ \partial q(\tau),\ \partial h(\tau),\ \partial\gamma(\tau),$$
$$\partial\varphi(\tau),\ \partial\psi(\tau),\ \Delta\varphi(\tau),\ \Delta\psi(\tau)$$

удовлетворяют системе ограничений

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i\in\langle l\rangle}\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{I}}}{\partial q_i}\right)^*\partial q_i=0,\quad j\in I_{\mathrm{I}},\\
&\sum_{i\in\langle l\rangle}\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{II}}}{\partial h_i}\right)^*\partial h_i=0,\quad j\in I_{\mathrm{II}},\\
&\sum_{i\in\langle l\rangle}\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{III}}}{\partial q_i}\right)^*\partial q_i+\sum_{i\in\langle l\rangle}\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{III}}}{\partial h_i}\right)^*\partial h_i+\\
&\quad+\sum_{i\in\langle l\rangle}\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{III}}}{\partial \gamma_i}\right)^*\partial \gamma_i=0,\quad j\in I_{\mathrm{III}};
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\partial t(\tau)C_\varphi+\partial t(\tau)\Delta\varphi(\tau)+[\operatorname{diag}a_i]\,|\partial x(\tau)|=0,\\
&\partial t(\tau)C_\psi+\partial t(\tau)\Delta\psi(\tau)+[\operatorname{diag}a_i]\,|\partial x(\tau)|=0,\\
&\partial\varphi(\tau)+\partial x(\tau)=0,\\
&\partial\psi(\tau)-\partial x(\tau)=0;
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta\varphi(\tau)+\partial\varphi(\tau)\geqslant A_\varphi,\quad \Delta\varphi(\tau)\geqslant A_\varphi;\\
&\Delta\psi(\tau)+\partial\psi(\tau)\geqslant A_\psi,\quad \Delta\psi(\tau)\geqslant A_\psi,\\
&Z^-(\tau)\leqslant\partial\gamma(\tau)\leqslant Z^+(\tau),\\
&\partial t(\tau)>0,
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

где значения векторов C_φ, A_φ, C_ψ, A_ψ определяются по результатам решения предыдущей задачи:

$$\begin{aligned}
C_\varphi&\equiv C_\varphi(\tau-1)=\varphi(\tau-1)+\partial\varphi(\tau-1)+\\
&\quad+x(\tau-1)+\partial x(\tau-1)-x^+,\\
A_\varphi&\equiv A_\varphi(\tau-1)=-\varphi(\tau-1)-\partial\varphi(\tau-1),\\
C_\psi&\equiv C_\psi(\tau-1)=\psi(\tau-1)+\partial\psi(\tau-1)-\\
&\quad-x(\tau-1)-\partial x(\tau-1)+x^+,\\
A_\psi&\equiv A_\psi(\tau-1)=-\psi(\tau-1)-\partial\psi(\tau-1),
\end{aligned} \tag{6}$$

а рекуррентный переход осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}
t_{\tau+1}&=t_\tau+\partial t(\tau),\\
x(\tau+1)&=x(\tau)+\partial x(\tau),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\gamma(\tau+1)=\gamma(\tau)+\partial\gamma(\tau),$$
$$\varphi(\tau+1)=\varphi(\tau)+\partial\varphi(\tau)+\Delta\varphi(\tau+1),$$
$$\psi(\tau+1)=\psi(\tau)+\partial\psi(\tau)+\Delta\psi(\tau+1).$$

Если номинальный режим работы системы определяется равенствами

$$q_i=\overset{*}{q_i},\quad i\in\{l\}^l,$$
$$h_i=\overset{*}{h_i},\quad i\in\{l\}^p, \tag{8}$$

то целевая функция $P(\tau)$ принимает вид

$$P(\tau)=\partial t(\tau)\Big[\sum_{i\in\langle l\rangle^l} b_i^q\,|q_i(\tau)+\partial q_i(\tau)-\overset{*}{q_i}|+$$
$$+\sum_{i\in\langle l\rangle^p} b_i^h\,|h_i(\tau)+\partial h_i(\tau)-\overset{*}{h_i}|\Big]. \tag{9}$$

Покажем, что в этом случае сформулированная выше задача сводится к задаче математического программирования с ограничениями в виде равенств одно- и двухсторонней ограниченностью переменных, к которой применим дифференциальный алгоритм Уайлда [3].

С помощью замены

$$Y=\Delta\varphi(\tau)-C;\ X=\partial x(\tau)-[C-A_\varphi] \tag{10}$$

и введения вспомогательной переменной $\xi\geqslant 0$ системы (4), (5) преобразуются в систему равенств

$$F(\eta;\ X;\ Y)\equiv N\eta+Y\eta+[\mathrm{diag}\,a_i]\,|X+M|=0, \tag{11}$$
$$f(\xi;\ X;\ Y)\equiv X-Y+\xi=0, \tag{12}$$

переменные которой удовлетворяют неравенствам

$$0\leqslant Y\leqslant -N, \tag{13}$$
$$\xi\geqslant 0,$$
$$\eta>0,$$

где $C\equiv C(\tau-1)=\max\{A_\varphi;\ (C_\psi+A_\psi-C_\varphi)\}$,

$$N=C+C_\varphi\quad M=C-A_\varphi,$$
$$\eta=\partial t(\tau),$$
$$Z=\partial\gamma(\tau).$$

Статическая подсистема (3) после установления взаимно-однозначного соответствия между множествами I_{I}, I_{II}, I_{III} и множеством индексов ветвей $\{l\}$ с учетом (10) принимает вид

$$F^{\mathrm{I}}(X^q)\equiv W^{\mathrm{I}}X^q-L^q=0,$$
$$F^{\mathrm{II}}(X^h)\equiv W^{\mathrm{II}}X^h-L^h=0, \tag{14}$$
$$F^{\mathrm{III}}(X,\ Z)\equiv W_q^{\mathrm{III}}X^q+W_h^{\mathrm{III}}X^h+W_\gamma^{\mathrm{III}}Z-L^\gamma=0,$$

где W^{I} — матрица главных сечений графа Y, составленных по отношению к дереву K^Q;

W^{II} — матрица фундаментальных циклов, опирающихся на антидерево $\overline{K}^H$;

$$\begin{aligned} L^q &= -W^{\mathrm{I}}M^q; \\ L^h &= -W^{\mathrm{II}}M^h; \\ L^{\gamma} &= -(W_q^{\mathrm{III}}M^q + W_h^{\mathrm{III}}M^h). \end{aligned} \tag{15}$$

Так как элементы $\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{III}}}{\partial q_i}\right)$, $\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{III}}}{\partial h_i}\right)$, $\left(\frac{\partial f_j^{\mathrm{III}}}{\partial \gamma_i}\right)$ матриц W_q^{III}, W_h^{III}, $W_{\gamma}^{\mathrm{III}}$, определяемые с помощью дифференцирования систем

$$\begin{cases} f_j^{\mathrm{III}} \equiv \gamma_j - \alpha_j |q_j| - \beta_j |q_j|^2 - |h_j| = 0, \\ \operatorname{sign} h_j = -\operatorname{sign} q_j \qquad (j \in \{l\}^a); \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} f_j^{\mathrm{III}} \equiv \gamma_j |q_j|^{\varkappa_j} - |h_j| = 0, \\ \operatorname{sign} h_l = \operatorname{sign} q_l \quad (j \in \{l\} \setminus \{l\}^a), \end{cases} \tag{17}$$

зависят от знака компонент последовательной переменной $q = \{q_l\}$, то для того, чтобы математическая модель (3)—(6) имела смысл, необходимо потребовать выполнения условий:

$$\begin{aligned} I_q^+(\tau) \cup I_q^0(\tau) &= \mathrm{const}, \\ I_q^-(\tau) \cup I_q^0(\tau) &= \mathrm{const} \end{aligned} \tag{18}$$

для каждого интервала τ, что эквивалентно дополнительным ограничениям

$$\begin{aligned} X_i^q &\geqslant [-M_i^q - q_i(\tau)], \quad i \in I_q^+, \\ X_i^q &\leqslant [-M_i^q - q_i(\tau)], \quad i \in I_q^-. \end{aligned} \tag{19}$$

Ограничимся таким классом управлений, для которого справедливы утверждения

$$[q_i(t^*) = q_i^*, \quad t^* \in [t_{\text{н}};\ t_k]] \Rightarrow [q_i(t) = q_i^*,\ t \in [t^*;\ t_k]] \quad (i \in \{l\}^l);$$

$$[h_i(t^*) = h_i^*;\ t^* \in [t_{\text{н}};\ t_k]] \Rightarrow [h_i,(t) = h_i^*, t \in [t^*;\ t_k]] \quad (i \in \{l\}^p);$$

Тогда для $\forall\tau$:

$$\begin{aligned} X_i &\geqslant S_i, \qquad i \in J_+(\tau); \\ X_i &= S_i, \qquad i \in J_0(\tau); \\ X_i &\leqslant S_i, \qquad i \in J_-(\tau), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$X = \{X_i\} = \begin{Bmatrix} X_i^q \\ X_i^h \end{Bmatrix}, \quad S = \{S_i\} = \begin{Bmatrix} S_i^q \\ S_i^h \end{Bmatrix}. \tag{21}$$

Целевая функция (9) с учетом (10) и ограничений (20) преобразуется к виду

$$P(\tau)=\eta\Big[\sum_{i\in J_{+}^{q}} b_i^q (X_i^q - S_i^q)+\sum_{i\in J_{-}^{q}} b_i^q (S_i^q - X_i^q)+$$

$$+\sum_{i\in J_{+}^{h}} b (X_i^h - S_i^h)+\sum_{i\in J_{-}^{h}} b_i^h (S_i^h - X_i^h)\Big]. \qquad (22)$$

Совместное рассмотрение (13), (19), (20) приводит к системе ограничений

$$\begin{gathered} x_\mu \leqslant (x_\mu^{+})^*, \quad \mu\in\{\mu\}^{+};\\ x_\mu \geqslant (x_\mu^{-})^*, \quad \mu\in\{\mu\}^{-};\\ (x_\mu^{-})^* \leqslant x_\mu \leqslant (x_\mu^{+})^*, \quad \mu\in\{\mu\}^{\pm};\\ x_\mu > 0, \quad \mu\in\{\mu_8\};\\ x_\mu = (x_\mu)^*, \quad \mu\in\{\mu\}^0 \end{gathered} \qquad (23)$$

относительно компонент x_μ общего вектора $\bar{x}$ переменных, имеющего блочную структуру

$$x\equiv[\bar{x}_j]=[\underset{1}{X^q}\,|\,\underset{2}{X^h}\,|\,\underset{3}{Z}\,|\,\underset{4}{\xi^q}\,|\,\underset{5}{\xi^h}\,|\,\underset{6}{Y^q}\,|\,\underset{7}{Y^h}\,|\,\underset{8}{\eta}]. \qquad (24)$$

Установим взаимно-однозначное соответствие между подмножествами $\{\mu_j\}_{j=1,\dots,8}$ множества $\{\mu\}$ индексов компонент вектора $\bar{x}$ и множеством $\{l\}$ индексов ветвей графа сети

$$\begin{gathered}\{\mu_j\}=\{[(j-1)\,l+i]: i\in\{l\}\}, \quad j=1,\dots,7;\\ \{\mu_j\}=\mu_{7l+1}, \quad j=8.\end{gathered}$$

Это дает возможность представить матрицу Якоби W вектор-функции

$$\begin{gathered}\bar{f}(\bar{x})=\{f_\nu(\bar{x})\},\\ \bar{f}(\bar{x})\equiv[\bar{f}_k]=[\bar{f}_{\mathrm{I}}\,|\,\bar{f}_{\mathrm{II}}\,|\,\bar{f}_{\mathrm{III}}\,|\,\bar{f}_{\mathrm{IV}}\,|\,\bar{f}_{\mathrm{V}}\,|\,f_{\mathrm{VI}}\,|\,\bar{f}_{\mathrm{VII}}]\end{gathered}$$

с компонентами, имеющими индексы

$$\nu\in\{\nu\}, \quad \{\nu\}=\bigcup_k\{\nu_k\},$$

в каноническом виде, учитывающем топологическую взаимозависимость переменных сетевой системы, если

$$\{\nu_k\}=\begin{cases}\{l: l\in\{l(K^Q)\}\}, & k=\mathrm{I},\\ \{(l+i): i\in\{e(\overline{K}^{\mathrm{H}})\}\}, & k=\mathrm{II},\\ \{[(k-1)\,l+i]: l\in\{l\}\}, & k=\mathrm{III},\dots,\mathrm{VII};\end{cases} \qquad (25)$$

$$\begin{gathered}\bar{f}_{\mathrm{I}}\equiv W^{\mathrm{I}}\bar{x}_1-L^q=0;\\ \bar{f}_{\mathrm{II}}\equiv W^{\mathrm{II}}\bar{x}_2-L^h=0;\end{gathered}$$

$$\bar{f}_{\mathrm{III}} \equiv W_q^{\mathrm{III}}\bar{x}_1 + W_h^{\mathrm{III}}\bar{x}_2 + W_\gamma^{\mathrm{III}}\bar{x}_3 - L^\gamma = 0;$$

$$\bar{f}_{\mathrm{IV}} \equiv N^q\bar{x}_8 + \bar{x}_6\bar{x}_8 + [\operatorname{diag} a_i^q]\,|\bar{x}_1 + M^q| = 0;$$

$$\bar{f}_{\mathrm{V}} \equiv N^h\bar{x}_8 + \bar{x}_7\bar{x}_8 + [\operatorname{diag} a_i^h]\,|\bar{x}_2 + M^h| = 0;$$

$$\bar{f}_{\mathrm{VI}} \equiv \bar{x}_1 - \bar{x}_6 + \bar{x}_4 = 0;$$

$$\bar{f}_{\mathrm{VII}} \equiv \bar{x}_2 - \bar{x}_7 + \bar{x}_5 = 0,$$

где $\bar{x}_8 \equiv x_{7l+1}$.

Тогда

$$W = \left[\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial x_j}\right]_{j=1,\ldots,8}^{k=\mathrm{I},\ldots,\mathrm{VII}} = \left[\left(\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_{jl}}\right)_{i\in\langle e\rangle}^{l\in\langle e\rangle}\right]_{j=1,\ldots,8}^{k=\mathrm{I},\ldots,\mathrm{VII}}. \tag{26}$$

К полученной задаче математического программирования с ограничениями-равенствами (25) одно- и двухсторонней ограниченностью переменных (23) применим дифференциальный алгоритм Уайлда [3]. Суть его состоит в определении допустимого вектора, удовлетворяющего необходимым условиям минимума функции (22):

1) $$x_\mu = (x_\mu^-)^*, \quad \left(\frac{\delta P}{\delta x_\mu}\right) \geqslant 0,$$
$$\mu \in (\{\mu\}^- \cup \{\mu\}^\pm) \cap \{\mu\}_d;$$

2) $$x_\mu = (x_\mu^+)^*, \quad \left(\frac{\delta P}{\delta x_\mu}\right) \leqslant 0,$$
$$\mu \in (\{\mu\}^+ \cup \{\mu\}^\pm) \cap \{\mu\}_d;$$

3) $$x_\mu < (x_\mu^+), \quad \left(\frac{\delta P}{\delta x_\mu}\right) = 0,$$
$$\mu \in (\{\mu\}^+ \cup \{\mu\}^\pm) \cap \{\mu\}_d, \tag{27}$$
$$x_\mu > (x_\mu^-)^* \left(\frac{\delta P}{\delta x_\mu}\right) = 0,$$
$$\mu \in (\{\mu\}^- \cup \{\mu\}^\pm) \cap \{\mu\}_d;$$
$$x_\mu > 0, \ \left(\frac{\delta P}{\delta x_\mu}\right) = 0, \qquad \mu \in \{\mu_8\} \cap \{\mu\}_d,$$

путем разбиения вектора $\bar{x}$ на вектор переменных состояния $\bar{x}_s = \{x_\mu : \mu \in \{\mu\}_s\}$ и вектор переменных решения $\bar{x}_d = \{x_\mu : \mu \in \{\mu\}_d\}$ и формирования на базе (26) матриц условных частных производных

$$\left[\frac{\delta P}{\delta \bar{x}_d}\right] = \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_s}\left[\frac{\delta \bar{x}_s}{\delta \bar{x}_d}\right] + \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_d}; \tag{28}$$

$$\left[\frac{\delta \bar{x}_s}{\delta \bar{x}_d}\right] = - W_s^{-1} W\,, \tag{29}$$

где

$$W_s = \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right]_{\mu \in \langle \mu \rangle_s}^{\nu \in \langle \nu \rangle}, \quad |W_s| \neq 0,$$

$$W_d = \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right]_{\mu \in \langle \mu \rangle_d}^{\nu \in \langle \nu \rangle} = \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right]_{\mu \in \langle \mu \rangle / \langle \mu \rangle_s}^{\nu \in \langle \nu \rangle}.$$

Значения элементов матрицы $\left[\frac{\delta P}{\delta \bar{x}_d}\right]$ в некоторой допустимой точке $\bar{x}$ определяют ту переменную решения x_μ, $\mu \in \{\mu\}_d$, которая должна уменьшить целевую функцию на данном этапе итерационного процесса. Шаг изменения этой переменной определяется в результате анализа возможности выхода одной из компонент вектора $\bar{x}_s$ за пределы допустимой области (23) или обращения в нуль производной $\left(\frac{\delta P}{\delta x_\mu}\right)$. Исходной информацией для такого анализа служат значения элементов матрицы $\left[\frac{\delta \bar{x}_s}{\delta \bar{x}_d}\right]$ и характеристики допустимой области (23).

Таким образом, управление рассматриваемым классом сетевых систем определяется в виде рекуррентной последовательности управляющих воздействий $\gamma(\tau)$, $\tau = 1, \ldots,$ каждый элемент которой находится в результате решения задачи математического программирования (22), (23), (25) методом Уайлда, разработанным в [2].

Принятые обозначения:

I_q^+, I_q^-, I_q^0 — множества индексов ветвей, которым соответствуют положительные, отрицательные и нулевые значения последовательной переменной;

J_+, J_-, J_0 — множества индексов ветвей, определенных следующим образом:

$$J_+ = \begin{bmatrix} J_+^q \\ J_+^h \end{bmatrix}, \quad J_- = \begin{bmatrix} J_-^q \\ J_-^h \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} J_0^q \\ J_0^h \end{bmatrix},$$

где

$$J_+^q = \{i \in \{l\}^l : q_l > q_i^*\};$$
$$J_+^h = \{i \in \{l\}^p : h_i > h_i^*\}$$

(аналогично определяются оставшиеся множества с той лишь разницей, что знак $>$ заменяется соответственно на $<$ или $=$)

$\{\mu\}^+$, $\{\mu\}^-$, $\{\mu^\pm\}$ — множества индексов компонент вектора $\{x_\mu\}$, имеющих соответственно верхние, нижние и двухсторонние ограничения;

$\{l(K^Q)\}$, $\{l(\overline{K}^H)\}$ — множ ества индексов ветвей дерева K^Q графа Y, соответствующего первому постулату сетей и антидерева $\overline{K}^H$, соответствующего второму постулату сетей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малый В. В., Михайленко В. М* Математическая модель процесса управления в переходных режимах одного класса сложных сетевых систем. — В сб.: Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. Вып. 33. Харьков, «Вища школа», 1975, с. 45—49.
2. *Евдокимов А. Г.* Разработка методов исследования и проектирования сложных инженерных сетей с применением ЦВМ. Автореф. на соиск. учен. степени д-ра техн. наук. Харьков, 1972. 20 с.
3. *Beightler C. S., Wilde D. I.* Foundations of Optimization. PREN — TICE — HALL. 1967. 78 p.

УДК 62:50:62—505

Алгоритмизация процесса управления одним классом сложных сетевых систем. Малый В. В., Михайленко В. М. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 88—95.

Математическая модель задачи управления сложными сетевыми системами рассмативаемого класса приводится к задаче математического программирования с ограничениями в виде равенств с одно- и двухсторонней ограниченностью переменных, для решения которой применяется дифференциальный алгоритм Уайдла.

Библиогр. 3