УДК 62—505.001.24
Н. Н. КОРОБОВ, канд. техн. наук,
А. А. ДОЛГИЙ, канд. техн. наук,
Б. В. РУБЦОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ К ИЗМЕНЕНИЮ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ПАРАМЕТРОВ КОНТУРА УПРАВЛЕНИЯ

Постановка задачи

Насколько изменение внешних воздействий или параметров контура управления ухудшает точность системы фильтрации представляет интерес. Существенно важным является решение задачи о целесообразности применения в каждом конкретном случае адаптивных к изменению внешних воздействий систем [1].

При синтезе систем часто бывает необходимо оценить точность, с которой следует задавать параметры моделей воздействий. Ответы на перечисленные вопросы следует искать в теории чувствительности. Однако математический аппарат этой теории использует линейное приближение оценок чувствительности, справедливое только для малых отклонений параметров от оптимальных значений. В настоящей статье исследуется чувствительность систем фильтрации при больших отклонениях характеристик внешних воздействий и параметров системы от оптимума.

Оптимальная система фильтрации, обеспечивающая несмещенную оценку $\hat{z}$ сигнала z

$$<z-\hat{z}> = 0 \tag{1}$$

и минимальную квадратичную ошибку

$$(\varepsilon^T\varepsilon)^* = \min \mathrm{Sp} < [z-\hat{z}]\,[z-\hat{z}]^T > \tag{2}$$

описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\hat{z}} = A^*\hat{z} + K^*C\,[x-\hat{z}], \tag{3}$$

где $z = z(t)$ — задается в виде n-мерного марковского процесса [2],

$$\dot{z} = A^*z + B^*\zeta; \tag{4}$$

$x = x(t)$ — наблюдаемый сигнал, поступающий на вход системы в смеси с аддитивным шумом

$$x = Cz + \xi; \tag{5}$$

$A^* = A^*(t)$; $B^* = B^*(t)$; $C = C(t)$ — прямоугольные матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(l \times n)$ соответственно; $K^* = K^*(t)$ — оптимальная матрица усилений $(n \times l)$.

Ковариационные матрицы $\zeta = \zeta(t)$ и $\xi = \xi(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &<\zeta\zeta^T> = S^*\delta(t-\tau); \\ &<\xi\xi^T> = F^*\delta(t-\tau); \\ &<\zeta\xi^T> = <\xi\zeta^T> \equiv 0; \end{aligned} \tag{6}$$

K^* в (3) определяется по формуле

$$K^* = \Gamma^*CF^{*-1}, \tag{7}$$

где $\Gamma^* = \Gamma^*(t)$ — ковариационная матрица ошибки в оптимальной системе

$$\Gamma^* = <[z-\hat{z}]\,[z-\hat{z}]^T>\Big|_{K=K^*} \tag{8}$$

представляет собой решение матричного уравнения Риккати:

$$\dot{\Gamma}^* = A^*\Gamma^* + \Gamma^*A^{*T} + B^*S^*B^{*T} - \Gamma^*C^TF^{*-1}C\Gamma^*. \tag{9}$$

Для $C = [10 \ldots 0]$ и установившегося решения (9) элементы K^* имеют вид

$$\overset{*}{k}_{ij} = \overset{*}{\gamma}_{ij} \overset{*}{f}_{ij}^{-1}. \tag{10}$$

В случае модели сигнала (4), соответствующей последовательному соединению n интеграторов, нетрудно получить

$$\overset{*}{k}_{ij} = d_{ij} q^{\frac{i+j-1}{n}}, \tag{11}$$

где

$$q = \left[\overset{*}{s}_{11} \overset{*}{f}_{11}^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}; \quad d_{ij} = 2^{0,5(i+j-1)(n+1-i-j)} \tag{12}$$

$\overset{*}{\gamma}_{ij}$, $\overset{*}{f}_{ij}$, $\overset{*}{s}_{ij}$ — элементы матриц Γ^*, F^*, S^*.

Для модели сигнала, соответствующей последовательному соединению n апериодических звеньев с постоянными времени $T_i = \frac{1}{\alpha_i}$ наибольшую трудность составляет определение одного из коэффициентов $\overset{*}{k}_{ij}$, представляющего собой для установившегося режима решение алгебраического уравнения порядка $2n$.

Можно показать, что достаточно точное приближение решения (7), (9) дает формула

$$\overset{*}{k}_{11} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + d_{11} \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + q^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

где

$$\alpha_i = a_{ii};$$

d_{11}, q определяются из (12). Полагая в (13) соответствующие $\alpha_i = 0$, можно получить формулы оптимальных значений k_{i1} для модели сигнала, соответствующей последовательному соединению нескольких интеграторов и апериодических звеньев.

Вывод основных формул чувствительности

Дифференциальное уравнение для ковариационной матрицы неоптимальной системы фильтрации, дающей несмещенную оценку $\hat{z}(t)$, имеет вид

$$\dot{\Gamma} = [A - KC]\,\Gamma + \Gamma\,[A - KC]^T + BSB^T + KFK^T. \tag{14}$$

Определим чувствительность оптимальной системы фильтрации к изменению параметров системы. Возмущенные значения параметров и дисперсии в квазиоптимальной системе запишем в виде

$$A = A^* + \Delta A, \quad K = K^* + \Delta K, \quad B = B^* + \Delta B, \quad \Gamma = \Gamma^* + \Delta\Gamma. \tag{15}$$

Здесь A^* и B^* — матрицы, входящие в модель сигнала, для которой определены оптимальные значения K^* и Γ^*; ΔA, ΔB, ΔK,

$\Delta\Gamma$ — отклонения соответствующих матриц от оптимальных значений. Подставляя (15) в (14) и вычитая почленно (9), получим уравнение для $\Delta\Gamma$:

$$\Delta\dot{\Gamma} = [A - KC]\Delta\Gamma + \Delta\Gamma\,[A - KC]^T +$$
$$+ \Gamma^*\Delta A^T + \Delta A\Gamma^* + BSB^T - B^*SB^{*^T} + \Delta K\Gamma^*\Delta K^T. \tag{16}$$

Используя обозначения

$$\begin{gathered} A - KC = -R, \\ \Delta A\Gamma^* + \Gamma\Delta A^T = W_{\Delta A}, \\ BSB^T - B^*SB^{*^T} = W_{\Delta B}, \\ \Delta K\Gamma^*\Delta K^T = W_{\Delta K}, \end{gathered} \tag{17}$$

перепишем (16) в виде

$$\Delta\dot{\Gamma} + R\Delta\Gamma + \Delta\Gamma R^T = W_{\Delta A} + W_{\Delta B} + W_{\Delta K} = W. \tag{18}$$

Решение неоднородного матричного уравнения (18) имеет вид

$$\Delta\Gamma(t) = \Theta(t, 0)\,\Delta\Gamma\Theta^T(t, 0) + \int_0^t \Theta(t, \tau)\,W(\tau)\,\Theta(t, \tau)\,d\tau, \tag{19}$$

где $\Theta(t, \tau)$ — фундаментальное решение для (18). Для стационарного случая $R(t) = R$ решение (18) может быть найдено с помощью интеграла свертывания:

$$\Delta\Gamma(t) = \exp\{-Rt\}\,\Delta\Gamma(0)\exp\{-Rt\} + \exp\{-Rt\} \times$$
$$\times \left[\int_0^t \exp\{R\tau\}\,W(\tau)\exp\{R^T\cdot\tau\}\,d\tau\right]\exp\{-R^Tt\}, \tag{20}$$

В установившемся режиме $\Delta\dot{\Gamma}(t) = 0$, следовательно, из (18) имеем

$$R(t)\,\Delta\Gamma(t) + \Delta\Gamma(t)\,R^T(t) = W(t). \tag{21}$$

В общем случае, задавая возмущенные значения параметров в виде (15), получим

$$\Delta\dot{\Gamma}(t) = [A - KC]\,\Delta\Gamma + \Delta\Gamma\,[A - KC]^T + [\Delta A - \Delta KC]\,\Gamma^* +$$
$$+ \Gamma^*[\Delta A - \Delta KC]^T + [\Delta A - \Delta KC]\,\Delta\Gamma + \Delta\Gamma\,[\Delta A - \Delta KC]^T +$$
$$+ \Delta KF^*K^{*^T} + K^*F^*\Delta K^T + \Delta K\Delta FK^{*^T} + K^*\Delta F\Delta K^T + K^*\Delta FK^{*^T} +$$
$$+ \Delta KF\Delta K^T + \Delta K\Delta F\Delta K^T + \Delta BS^*\Delta B^T + B^*S^*\Delta B^T + \tag{22}$$
$$+ \Delta B\Delta SB^{*^T} + B^*\Delta S\Delta B^T + B^*\Delta SB^{*^T} + \Delta B\cdot S^*\cdot B^T + \Delta B\Delta S\Delta B^T.$$

Практическое использование (22) связано со значительными вычислительными трудностями даже для систем первого и второго порядков. Поэтому представляет интерес получить рекуррентное соотношение, позволяющее при вычислениях переходить от формул для систем с низшей размерностью к формулам для систем с более высокой размерностью.

Представляя модель сигнала согласно схеме рис. 1 и производя синтез оптимальной системы последовательно для $n = 1, 2, \ldots,$ по индукции определим систему линейных уравнений для вычисления элементов $\Delta\gamma_{ij}$ матрицы $\Delta\Gamma$,

$$\Delta\gamma_{ij} = \Delta\gamma_{ji} = \gamma_{ij} - \overset{*}{\gamma}_{ij}, \tag{23}$$

в виде

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\gamma}_{ij} = &- K_{i1}\Delta\gamma_{1j} - K_{j1}\Delta\gamma_{1i} - (\alpha_i + \alpha_j)\,\Delta\gamma_{ij} - \\ &- (\Delta\alpha_i + \Delta\alpha_j)\,\overset{*}{\gamma}_{ij} - \Delta k_{i1}\overset{*}{\gamma}_{1j} - \Delta k_{j1}\overset{*}{\gamma}_{1i} + \Delta\gamma_{i+1,\,j} + \\ &+ \Delta\gamma_{i,\,j+1} + \left[\Delta k_{j1} + \Delta k_{i1}\overset{*}{k}_{j1}\right] f_{11} + \overset{*}{k}_{i1}\overset{*}{k}_{j1}\Delta f_{11} + \\ &+ \delta(i,\,n)\,\delta(j,\,n) \times \left\{\left[\prod_{k=1}^{n} b_k^2 - \prod_{k=1}^{n} \overset{*}{b}{}_k^{2}\right] s_{11} + \prod_{k=1}^{n} b_k \Delta s_{11}\right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

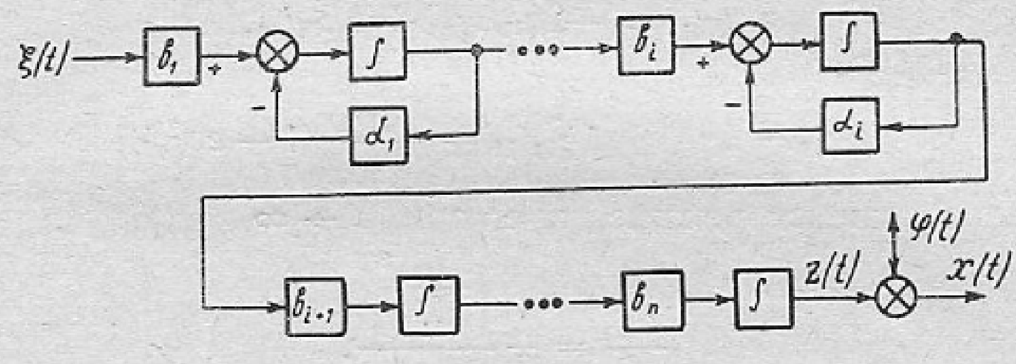

Рис. 1.

Здесь

$$\delta(l,\ k) = \begin{matrix} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k \end{matrix} \tag{25}$$

символ Кронекера; $b_k = \alpha_k m_k$, m_k — коэффициент усиления k-го инерционного звена или интегратора. Полагая в (24) $\Delta\dot{\gamma}_{ij} = 0$, нетрудно получить систему линейных уравнений первого порядка для вычисления $\Delta\gamma_{ij}$. Решение (24) в установившемся режиме для $n = 1$ имеет вид

$$\Delta\gamma_{11} = \frac{c_{11}}{2\,(k_{11} + \alpha_1)}. \tag{26}$$

Для $n = 2$

$$\Delta\gamma_{11} = \frac{k_{21} + \alpha_2\,(k_{11} + \alpha_1 + \alpha_2)]\,c_{11} + 2\alpha_2 c_{12} + c_{22}}{2\,(k_{11} + \alpha_1 + \alpha_2)\,[k_{21} + \alpha_2\,(k_{11} + \alpha_1)}, \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} c_{ij} = &-(\Delta\alpha_i + \Delta\alpha_j)\,\overset{*}{\gamma}_{ij} - \Delta k_{i1}\overset{*}{\gamma}_{1j} - \Delta k_{j1}\overset{*}{\gamma}_{1i} + \\ &+ \left[\Delta k_{j1}k_{i1} + \Delta k_{i1}\overset{*}{k}_{j1}\right] f_{11} + \overset{*}{k}_{i1}\Delta f_{11} + \\ &+ \delta(i,\,n)\,\delta(j,\,n)\left\{\left[\prod_{k=1}^{n} b_k^2 - \Pi \overset{*}{b}{}_k^{2}\right] s_{11} + \prod_{k=1}^{n} b_k^2 \Delta s_{11}\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Применение уравнений чувствительности

При оценке чувствительности оптимальных систем необходимо исследовать влияние изменения одного или нескольких параметров модели сигнала или системы. В этом случае в общих уравнениях чувствительности (16), (23) следует положить возмущения всех параметров, кроме исследуемого, равными нулю. Рассмотрим примеры, когда модель полезного сигнала при проектировании системы определена ошибочно. Эта ошибка может быть в случаях, если допущена погрешность при построении модели полезного сигнала или модель намеренно изменена с целью получить более простые формулы при синтезе.

Оценим чувствительность простейшей оптимальной системы для модели сигнала, соответствующей одному интегратору. Для рассматриваемого случая имеем согласно (16), (23)

$$\Delta\gamma_{11} = -2k^{*}_{11}\Delta\gamma_{11} + \Delta k^{2}_{11} l_{11}, \tag{29}$$

следовательно,

$$\Delta\gamma_{11} = \Delta\gamma_{11}(0)\,\Delta k^{2}_{11} f^{*}_{11} + \frac{\Delta k^{2}_{11} f^{*}_{11}}{2k_{11}}\left(1 - e^{-2k_1 t}\right). \tag{30}$$

В установившемся режиме, т. е. при $t \to \infty$

$$\frac{\Delta\gamma_{11}}{\gamma^{*}_{11}} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{\Delta k_{11}}{k^{*}_{11}}\right)^{2}}{1 + \dfrac{\Delta k_{11}}{k^{*}_{11}}}. \tag{31}$$

График зависимости $\dfrac{\Delta\gamma_{11}}{\gamma^{*}_{11}} = f\left(\dfrac{\Delta k_{11}}{k^{*}_{11}}\right)$ приведен на рис. 2. Оптимальная система первого порядка оказывается мало чувствительной к изменению коэффициента усиления. Так, при изменении k_{11} менее чем на 20% точность оптимальной системы практически не изменяется.

Пример 1. Модель полезного сигнала представляет собой последовательное соединение двух интеграторов. Определим чувствительность оптимальной системы к изменению коэффициента усиления. Для установившегося режима из (24) получим

$$2k_{11}\Delta\gamma_{11} - 2\Delta\gamma_{12} = f^{*}_{11}\Delta k^{2}_{11}, \tag{32}$$

$$k_{11}\Delta\gamma_{12} + k_{21}\Delta\gamma_{11} - \Delta\gamma_{22} = \Delta k_{11}\Delta k_{21} f^{*}_{11},$$

$$2\Delta\gamma_{12}k_{21} = \Delta k^{2}_{21} f^{*}_{11}.$$

Решая систему относительно $\Delta\gamma_{ij}$, имеем

$$\Delta\gamma_{12} = \frac{f^{*}_{11}\Delta k^{2}_{21}}{2\left(k^{*}_{21} + \Delta k_{21}\right)}, \tag{33}$$

$$\Delta\gamma_{11} = \frac{\Delta k^{2}_{11} f^{*}_{11}}{2k_{11}} + \frac{f^{*}_{11}\Delta k^{2}_{21}}{2k_{11}k_{21}}.$$

Нормированное отклонение дисперсии определится по формуле

$$\frac{\Delta\gamma_{11}}{\overset{*}{\gamma}_{11}} = \frac{n^2}{2(1+n)}\left[1 + \frac{0{,}5m^2}{n^2(1+m)}\right], \tag{34}$$

где введены обозначения

$$n = \frac{\Delta k_{11}}{\overset{*}{k}_{11}}, \quad m = \frac{\Delta k_{21}}{\overset{*}{k}_{21}}.$$

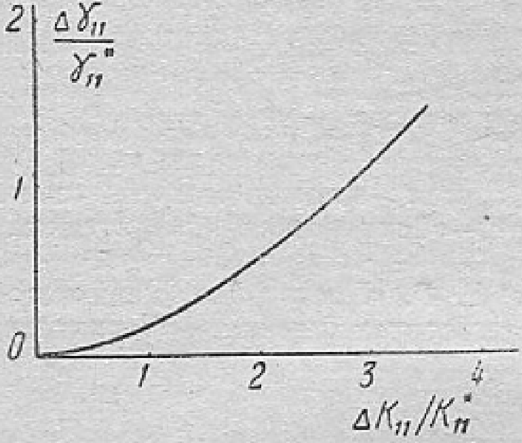

Рис. 2.

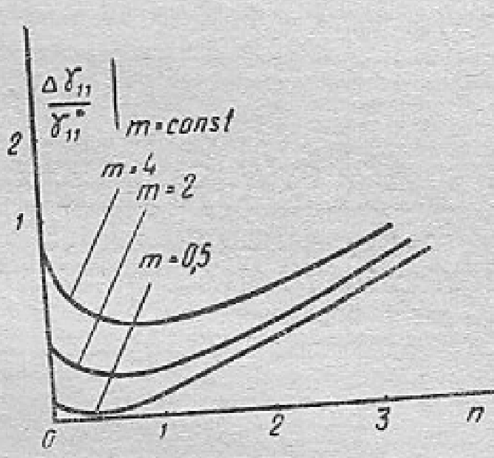

Рис. 3.

График зависимости $\frac{\Delta\gamma_{11}}{\overset{*}{\gamma}_{11}} = f(n, m)$ приведен на рис. 3. Исследуя графики, отметим, что чувствительность системы второго порядка к изменению коэффициентов выше за счет изменения k_{21}. Однако заметное влияние на величину $\Delta\gamma_{11}$ отклонения k_{21} от оптимального значения имеет место при $m \gg 1$. При $m < 1$ чувствительность системы второго порядка практически совпадает с чувствительностью систем первого порядка и формула (34) переходит в (31).

Пример 2. Оценим чувствительность оптимальной системы второго порядка к изменению характеристик внешних воздействий. Для модели сигнала примера 1 получим

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\gamma}_{11}(t) &= 2\left[\Delta\gamma_{12} - \overset{*}{k}_{11}\Delta\gamma_{11}\right] + k_{11}^2\Delta f_{11},\\ \Delta\dot{\gamma}_{12}(t) &= \Delta\gamma_{22} - \overset{*}{k}_{11}\Delta\gamma_{12} - \overset{*}{k}_{21}\Delta\gamma_{11} + \overset{*}{k}_{11}\overset{*}{k}_{21}\Delta f_{11},\\ \Delta\dot{\gamma}_{22}(t) &= -2\overset{*}{k}_{11}\Delta\gamma_{12} + \overset{*}{k}_{21}\Delta\gamma_{11} + b_1^2 b_2^2\Delta s_{11}. \end{aligned} \tag{35}$$

Для установившегося режима из (35) имеем

$$\Delta\gamma_{11} = \frac{\overset{*}{k}_{21}\overset{*}{k}_{11}\Delta f_{11} + \overset{*}{k}_{21}\Delta f_{11} + b_1^2 b_2^2\Delta s_{11}}{2\overset{*}{k}_{11}\overset{*}{k}_{21}}; \tag{36}$$

при $b_1 = b_2 = 1$

$$\frac{\Delta\gamma_{11}}{\overset{*}{\gamma}_{11}} = 0{,}75\frac{\Delta f_{11}}{\overset{*}{f}_{11}} + 0{,}125\frac{\Delta s_{11}}{\overset{*}{s}_{11}}. \tag{37}$$

Аналогичные расчеты для системы первого порядка с моделью, соответствующей одному интегратору, дают

$$\frac{\Delta\gamma_{11}}{\overset{*}{\gamma}_{11}} = 0{,}5\,\frac{\Delta f_{11}}{\overset{*}{f}_{11}} + 0{,}5\,\frac{\Delta s_{11}}{\overset{*}{s}_{11}}. \qquad (38)$$

Таким образом, с ростом порядка модели сигнала чувствительность ошибки растет по отношению к изменениям мешающего сигнала и падает по отношению к величине спектральной плотности шума, возбуждающего модель сигнала. Это обстоятельство имеет решающее значение при проектировании оптимальных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробов Н. Н.* Оценка эффективности систем автоматического управления с самонастройкой по входному сигналу.—«Техническая кибернетика», 1966, № 1, с. 118—123.
2. *Коробов Н. Н., Долгий А. А., Рубцов Б. В.* Построение марковской модели полезного сигнала для систем автосопровождения.—«Техническая кибернетика», 1973, № 2, с. 125—132.

УДК 62—50

Исследование чувствительности систем оптимальной фильтрации к изменению внешних воздействий и параметров контура управления. Коробов Н. Н., Долгий А. А., Рубцов Б. В. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 41—48.

Исследуется чувствительность систем оптимальной фильтрации к изменению в широком диапазоне как вероятностных характеристик внешних воздействий, так и параметров самих систем. Устанавливаются аналитические соотношения для оценки чувствительности, которые позволяют ответить на вопросы о точности задания модели входных воздействий и вычисления оптимальных параметров систем, а также о необходимости использования в них принципов самонастройки. Приводятся примеры чувствительности систем.

Ил. 3. Библиогр. 4.