УДК 62—506.11
Н. Н. КОРОБОВ,
канд. техн. наук,
Б. В. РУБЦОВ

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПРИ НЕПОЛНОМ ЗАДАНИИ МОДЕЛИ ПОЛЕЗНОГО ВХОДНОГО СИГНАЛА

Постановка задачи

При синтезе оптимальной линейной системы фильтрации n-мерного марковского сигнала типа Ито предполагаются заданными модель сигнала [1]

$$\dot{z} = Az + B\zeta \tag{1}$$

и модель наблюдения

$$x = Cz + \xi, \tag{2}$$

где $z = z(t)$; $x = x(t)$; $\zeta = \zeta(t)$; $\xi = \xi(t)$ — соответственно n, l, m l-мерные векторы.

В случае полного задания или информации параметры модели $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$ представляют собой матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(l \times n)$ соответственно, априори известны, так же, как и ковариационные матрицы $S = S(t)$, $R = R(t)$ взаимно-некоррелированных шумов, ζ и ξ;

$$\begin{gathered} < \zeta(t)\,\zeta^T(\tau) > = \delta(t-\tau)\,S(t); \\ < \xi(t)\,\xi^T(\tau) > = \delta(t-\tau)\,R(t); \\ < \xi(t)\,\zeta^T(\tau) > = < \zeta(t)\,\xi^T(t) > \equiv 0. \end{gathered} \tag{3}$$

В (3) S и R соответственно неотрицательно и положительно определенные матрицы размерностей $(n \times m)$ и $(l \times l)$.

Оптимальная система должна минимизировать функционал качества вида

$$I = \varepsilon^T(t_k)\,F\varepsilon(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \varepsilon^T(\tau)\,G(\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau,$$

где

$\varepsilon(t) = \widehat{z}(t) - z(t)$ — вектор ошибки, F, G—весовые матрицы $(n \times n)$

$\widehat{z}(t)$ — вектор оценки размерности n.

В практических приложениях часто имеет место случай неполной информации, или неполного задания модели системы. При этом матрицы, характеризующие параметры модели A, B, C, S, R либо все, либо частично неизвестны априори. Решение задачи фильтрации при неполной информации может решаться путем расширения модели сигнала или путем построения адаптивной системы.

При использовании первого способа, если, например, неизвестна матрица $A = (a_{ij})$; i, $j = 1, 2, \ldots, n$, или некоторые из ее элементов a_{ij}, модель сигнала (1) может быть расширена за счет новых компонентов вектора состояния

$$z_{n+l+i} = a_{lj};\ i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

путем добавления линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{z}_{n+k} = a_{n+k,\ n+k} z_{n+k} + b_{n+k,\ n+k} \zeta_{n+k}. \qquad (4)$$

Параметры дополнительных уравнений (4) $a_{n+k,\ n+k}$ и $b_{n+k,\ n+k}$ можно положить априори известными или неизвестными. В первом случае получим новую модель сигнала с увеличенной размерностью. Кроме того, эта модель оказывается нелинейной, а следовательно, задача оптимальной линейной фильтрации с неполной информацией приводится к задаче нелинейной фильтрации. Если при этом параметры дополнительных уравнений $a_{n+k,\ n+k}$ и $b_{n+k,\ n+k}$ нельзя считать известными, то необходимо продолжить процесс расширения состояния. Кроме быстрого увеличения размерности модели возникают иные трудности определения начальных условий для дополнительных уравнений и конечных условий для сопряженной системы.

В настоящей статье рассматривается второй способ, использующий адаптивный подход к построению системы фильтрации при неполной информации. Можно показать [2], что неточное задание матриц B, C, S, R в модели сигнала (1) мало сказывается на свойствах оптимальной системы. В то же время погрешности в определении A могут оказать существенное влияние на точность решения задачи оптимизации. Рассмотрим один из возможных способов построения адаптивной системы, способной подстраивать параметры замкнутого контура при помощи корреляционной обратной связи. При неточном задании параметров матрицы A в модели сигнала, корреляционная обратная связь перестраивает параметры системы до тех пор, пока последние не станут равными параметрам модели сигнала. Для построения алгоритма системы с корреляционной обратной связью составляются дифференциальные уравнения адаптивной системы в отклонениях от оптимальной и исследуется устойчивость с помощью второго метода Ляпунова.

Дифференциальные уравнения для оптимальной системы при неизвестной матрице A

Зададим линейную оптимальную систему алгоритмической схемой (см. рис. 1), для которой

$$\dot{\hat{z}} = \hat{K}\xi - \hat{K}C\hat{z} + \hat{A}\hat{z}, \qquad (5)$$

где $\hat{z} = \hat{z}(t)$ — n-мерный вектор состояния системы фильтрации;

$\hat{A} = A(t) + \delta A(t)$ — $n \times n$-матрица, установленная в системе;

$\hat{K} = K(t) + \delta K(t)$ — матрица усилений.

Дифференциальное уравнение вектора ошибки $\varepsilon = \hat{z} - z$ определится в виде

$$\dot{\varepsilon} = (\hat{A} - \hat{K}C)\,\varepsilon + \hat{K}\xi - B\zeta. \tag{6}$$

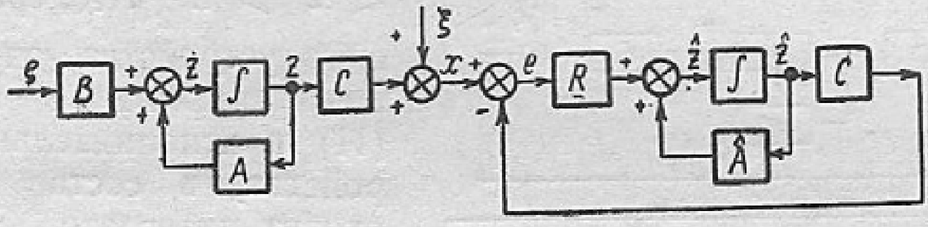

Рис. 1.

При условии $\delta A = \delta K = 0$ дифференциальное уравнение (6) переходит в уравнение для ошибки оптимального фильтра Кальмена, для которого

$$\hat{K} = K = \Gamma C R^{-1}, \tag{7}$$

где $\Gamma = < \varepsilon^* \varepsilon^{*T} >$ — решение уравнения Риккати;

$$\dot{\Gamma} = A\Gamma + \Gamma A^T + BSB^T - \Gamma G^T R^{-1} G \Gamma. \tag{8}$$

При построении контура самонастройки воспользуемся соотношениями для вторых моментов в оптимальной системе, для чего определим скалярное произведение $< e\hat{z}^T >$,
где

$$e = \xi - G\varepsilon \tag{9}$$

— сигнал рассогласования системы фильтрации. Нетрудно показать, что в оптимальной системе ($e = e^*$)

$$< e^* \hat{z}^{*T} > - \frac{1}{2} KR = 0. \tag{10}$$

Дифференциальные уравнения контура самонастройки

Равенство (10) выполняется только в оптимальной системе. В неоптимальной системе ошибка и оценка полезного сигнала коррелированы, т. е.

$$< e\hat{z}^T > - \frac{1}{2} KR = U. \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что сигнал $U = U(t)$ может быть использован для перестройки матрицы $\hat{A}$ основного контура системы фильтрации. При $\delta A = 0$, т. е. при условии оптимальности системы $U = 0$, кроме того, сигнал U меняет знак при изменении знака δA.

На рис. 2 приведена функциональная схема самонастраивающейся системы фильтрации, использующая условия (10), (11) для настройки матрицы $\hat{A}$. Контур самонастройки состоит из вспомогательных устройств, вычисляющих матричные переменные $<\widehat{ez^T}>$ и $\frac{1}{2}KR$, сравнивающего устройства, определяющего матрицу U согласно (11) и исполнительного устройства, в состав которого входит интегратор с матричным коэффициентом Q.

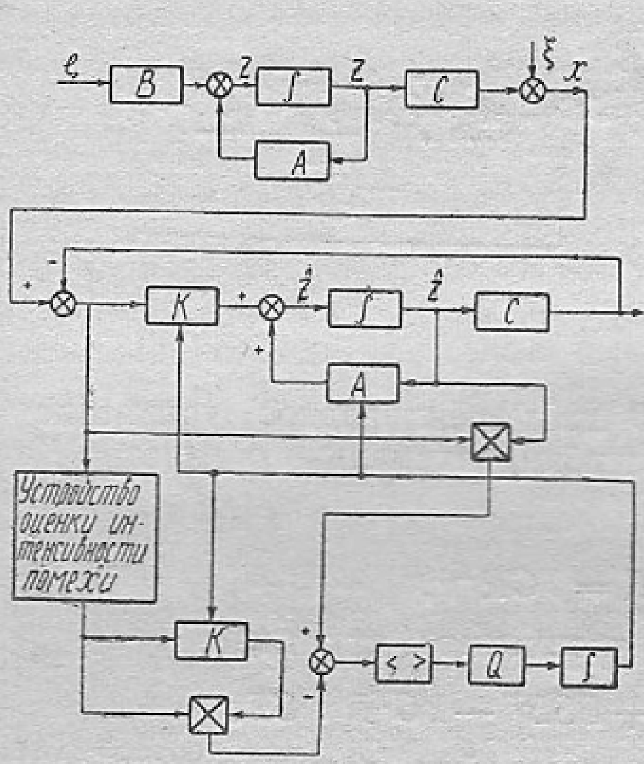

Рис. 2

Контур самонастройки на схеме рис. 2 описывается дифференциальным матричным уравнением

$$\frac{d}{dt}\hat{A} = Q\left\{<(x - C\hat{z})\,\hat{z}^T> - \frac{KR}{2}\right\}. \qquad (12)$$

Для идеальной самонастраивающейся системы

$$\frac{d}{dt}A = Q\left\{<(x - C\hat{z}^*)\,\hat{z}^{*T}> - \frac{KR}{2}\right\}. \qquad (13)$$

Вычитая (13) из (12) и учитывая (5), получим уравнение в отклонениях

$$\frac{d}{dt}\delta A = Q\left\{<\xi\Delta^T> - C<\varepsilon\hat{z}^T> - \frac{\delta KR}{2}\right\}, \qquad (14)$$

где

$$\Delta = \varepsilon - \varepsilon^* = \hat{z} - \hat{z}^*. \qquad (15)$$

В (12) и (14) предполагается, что действие нахождения математического ожидания, т. е. определение «среднего по множеству» производится абсолютно точно. В реальных схемах, в частности, в исследуемом ниже примере, вместо усреднения по множеству производится усреднение по времени. Такая идеализация усреднения может считаться обоснованной при выполнении двух условий:

величина δA является неизвестной заранее, т. е. случайной, но постоянной или медленно меняющейся;

постоянная времени сглаживания схемы усреднения по времени достаточно велика.

Условия, при которых $\delta A = \delta A(t)$ — случайная величина и представима подходящей математической моделью в виде стохастического дифференциального уравнения, в настоящей статье не рассматриваются.

Для полного описания динамики системы необходимо исследовать правую часть уравнения (14).

Прежде всего преобразуем

$$<\xi\Delta^T> = <\xi\varepsilon^T> - <\xi\varepsilon^{*T}>, \tag{16}$$

где ε и ε^* — решения уравнения (6) и уравнения

$$\dot{\varepsilon}^* = (A - KC)\varepsilon^* + K\xi - B\zeta \tag{17}$$

и представимы в виде

$$\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t, t_0)\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_\varepsilon(t, \tau)\widehat{K}_t(\tau)\xi(\tau)\,d\tau - \int_{t_0}^{t} v_\varepsilon(t, \tau)B(\tau)\zeta(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

$$\varepsilon^*(t) = v_{\varepsilon^*}(t, t_0)\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_{\varepsilon^*}(t, \tau)K(\tau)\xi(\tau)\,d\tau - \\ - \int_{t_0}^{t} v_{\varepsilon^*}(t, \tau)B(\tau)\zeta(\tau)\,d\tau \tag{19}$$

где $v_\varepsilon(t, \tau)$ и $v_{\varepsilon^*}(t, \tau)$ — фундаментальные матрицы уравнений (6) и (17) соответственно.

Подставляя (18) и (19) в (16), перепишем (14) в виде

$$\frac{d}{dt}\delta A - QC <\varepsilon\widehat{z}^T> = 0. \tag{20}$$

Определим дифференциальное уравнение для матричной переменной

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \tag{21}$$

где

$$\lambda_1 = <\varepsilon z^T>;\ \lambda_2 = <\varepsilon\varepsilon^T>, \tag{22}$$

следовательно,

$$\dot{\lambda}_1 = <\dot{\varepsilon}z^T> + <\varepsilon\dot{z}^T>;$$
$$\dot{\lambda}_2 = <\dot{\varepsilon}\varepsilon^T> + <\varepsilon\dot{\varepsilon}^T>. \tag{23}$$

Учитывая (1), (3), (5), (14), (15), (17), получим

$$\dot{\lambda}_1 = (A - KC)\lambda_1 + (\delta A - \delta KC)\lambda_1 + \lambda_1 A^T - BSB^T; \tag{24}$$

$$\dot{\lambda}_2 = (A - KC)\lambda_2 + \lambda_2(A - KC)^T + (\delta A - \delta KC)\lambda_2 + \lambda_2(\delta A - \\ - \delta KC)^T + KRK^T + \delta KR\delta K^T + BSB^T. \tag{25}$$

Складывая (24) и (25), найдем дифференциальное уравнение для $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$:

$$\dot{\lambda} = (A - KC)\lambda + (\delta A - \delta KC)\lambda + \lambda A - \lambda_2 C^T K^T + \lambda_2 (\delta A - \\ - \delta KC)^T + KRK^T + \delta KR\delta K^T. \quad (26)$$

Представляя $\dot{\lambda}_1$ в виде $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}^*_1 + \Delta P$ и учитывая, что $\dot{\lambda}^*_1 = 0$, получим уравнение для $\Delta \dot{P}$,

$$\Delta \dot{P} = (\delta A - \delta KC)\Delta P + \lambda_2 (\delta A - \delta KC)^T + \delta KR\delta K^T. \quad (27)$$

Представляя λ_2 в виде

$$\lambda_2 = \Gamma + \Delta\Gamma, \quad (28)$$

аналогично находим дифференциальное уравнение для $\Delta\Gamma$:

$$\Delta\dot{\Gamma} = (A - KC)\Delta\Gamma + \Delta\Gamma (A - KC)^T + (\delta A - \delta KC)\Gamma + \Gamma(\delta A - \\ - \delta KC)^T. \quad (29)$$

Исследование устойчивости самонастраивающейся системы фильтрации

Для определения устойчивости самонастраивающейся системы необходимо исследовать систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\delta\dot{A} + QC\Delta P = 0; \quad (30)$$

$$\Delta\dot{P} = (\delta A - \delta KC)\Delta P + \Gamma(\delta A - \delta KC)^T + \Delta\Gamma(\delta A - \delta KC) + \delta KR\delta K^T; \quad (31)$$

$$\Delta\dot{\Gamma} = (A - KC)\Delta\Gamma + \Delta\Gamma(A - KC)^T + (\delta A - \delta KC)\Gamma + \Gamma(\delta A - \delta KC)^T. \quad (32)$$

Для уравнения (30) нетрудно определить начальное условие:

$$\delta A /_{t=0} = \delta A_0. \quad (33)$$

Начальные условия для (31), могут быть найдены аналогично.

При исследовании устойчивости (30) — (32) удобно вначале исследовать устойчивость «укороченных» уравнений (30) и (32), полагая

$$\delta K = 0. \quad (34)$$

Если при выполнении условия (34) уравнения динамики устойчивы, то они будут устойчивы при неслучайных возмущениях $|\delta K| < \infty$. «Укороченная» система уравнений имеет вид

$$\delta\dot{A} + QC\Delta P = 0; \quad (35)$$

$$\Delta\dot{P} = \delta A\Delta P + \Gamma\delta A^T + \Delta\Gamma\delta A^T. \quad (36)$$

Уравнение (32) будет устойчивым, если пара матриц A и B полностью управляема, пара матриц A и C полностью наблюдаема, а возмущение δA не делает модель неуправляемой или ненаблюдаемой.

Исследуя устойчивость (35), (36) с помощью второго метода Ляпунова, введем положительно определенную матричную функцию

$$V = 0{,}5\,[\delta A^T L \delta A + \Delta P^T W \Delta P], \tag{37}$$

где L и W — положительно определенные матрицы соответствующих размерностей.

Тогда для устойчивости по Ляпунову необходимо, чтобы производная функции (37) по времени

$$\dot V = \frac{\partial V}{\partial \delta A}\frac{d\delta A}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \Delta P}\frac{d\Delta P}{dt} \tag{38}$$

была отрицательно определена. Учитывая (35), (36) получим

$$\dot V = -\delta A L Q C \Delta P + \Delta P W \delta A \Delta P + \Delta P W \Gamma \delta A^T + \Delta P W \Delta\Gamma \delta A^T. \tag{39}$$

Полагая $W = (\Gamma + \Delta\Gamma)^{-1}$, транспонируя (39) и обозначая $C^T Q^T L^T = M$, получим условие устойчивости по Ляпунову

$$\det[-\Delta P M \delta A^T + \Delta P \delta A^T \Gamma^{-1} \Delta P + \delta A \Delta P] < 0, \tag{40}$$

что всегда может быть выполнено подбором матрицы M.

Полученный результат свидетельствует о том, что «укороченная» система, т. е. система при $\delta K = 0$ устойчива. Следовательно, если предусмотреть в системе установку оптимального значения K, то последняя будет устойчива по Ляпунову.

Учет возмущения $\delta K \neq 0$ можно выполнить аналогичным способом, при этом в формуле, аналогичной (40), остается неизменным первый член $-\Delta P M \delta A^T$, что позволяет всегда удовлетворить условию устойчивости по Ляпунову.

Экспериментальное исследование самонастраивающегося фильтра второго порядка

Пусть модель полезного сигнала задается линейным уравнением второго порядка, для которого матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где $\alpha\beta = \omega_0^2$ — квадрат собственной частоты недемпфированных колебаний;

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \eta$ — коэффициент относительного демпфирования.

Учитывая (7), (8) для $C = (1,\ 0)$, найдем оптимальную матрицу усилений в виде

$$K = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 \\ \kappa_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

где

$$\kappa_{11} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta\,(1-\sqrt{1+g})}; \tag{43}$$

$$k_{21} = \alpha^2 - \alpha\beta\,(1-\sqrt{1+g}) - \alpha\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta\,(1-\sqrt{1+g})}; \tag{44}$$

$$g = \frac{s_{11}}{r_{11}} \text{ — отношение сигнал/шум.} \tag{45}$$

Полагая в (43), (44)

$$\beta = m\,\alpha, \tag{46}$$

где $m = \text{const}$, получим

$$k_{11} = \alpha n,\ k_{21} = \alpha^2 l, \tag{47}$$

здесь

$$n = \sqrt{1-2m\,(1-\sqrt{1+g})}, \tag{48}$$

$$l = n\,(n-1) - m\,(1-\sqrt{1+g}). \tag{49}$$

При условии (46) для $g = \text{const}$, если в системе фильтрации установлен параметр $\hat{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha$, самонастройка параметр а $\hat{\alpha}$ происходит до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\Delta\alpha = 0. \tag{50}$$

При условии (50) одновременно удовлетворяется и (34).

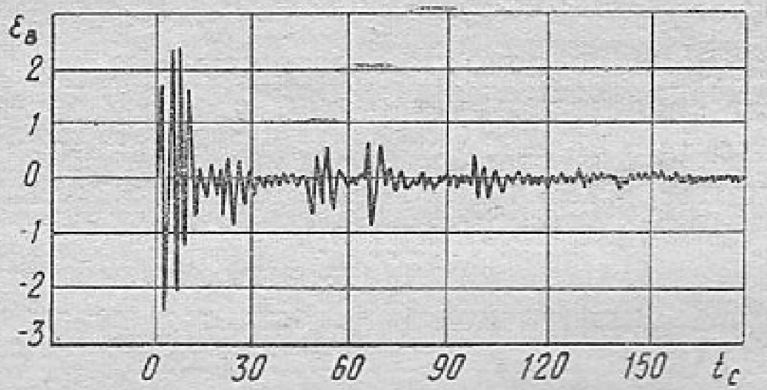

Рис. 3.

На рис. 3 приведены фотографии переходного процесса самонастройки системы фильтрации при $m = 2$, $g = 3$, $Q = q = 1$, причем α и $\hat{\alpha}$ различались до включения контура самонастройки.

При увеличении постоянной времени усреднения время переходного процесса увеличивается, но процесс самонастройки в системе фильтрации приобретает асимптотический характер, а в установившемся режиме $\Delta\alpha = \alpha - \hat{\alpha}$ стремится к нулю.

При малом T_y время переходного процесса мало, но велики случайные отклонения самонастраивающейся системы фильтрации от идеальной оптимальной.

Результаты эксперимента (см. рис. 3) позволяют оценить необходимую величину постоянной времени усреднения при приемлемых длительности переходного процесса и величине случайных отклонений самонастраивающейся системы фильтрации от идеальной оптимальной ($T_y = 2{,}5$ c).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalman R. E., Bucy R. C.* New Results in Linear Filtering anb Predictions Theory — J. Basic Eng. Vol. 83D., 1961, p. 35—79.
2. *Коробов Н. Н., Долгий А. А., Рубцов Б. В.* Построение марковской модели полезного сигнала для систем автосопровождения. — «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1973, № 2, с. 125—132.

УДК 62—506.11

Адаптивная система оптимальной фильтрации с корреляционной обратной связью при неполном задании модели полезного входного сигнала. Коробов Н. Н., Рубцов Б. В. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып, 34, 1975, с. 19—27.

Исследуется задача построения адаптивной системы оптимальной фильтрации при неполном задании модели полезного входного сигнала. Предполагается, что матрица марковской модели полезного сигнала постоянна или меняется достаточно медленно, но априори полностью неизвестна. Анализ взаимно-корреляционной функции сигнала рассогласования и выходного сигнала при этом показывает, что взаимно-корреляционная функция может быть использована в качестве управляющего сигнала для построения контура самонастройки. Устойчивость матричного дифференциального уравнения контура самонастройки исследуется с помощью второго метода Ляпунова. Доказано, что исследуемая система устойчива в большом. Результаты эксперимента, выполненного на аналоговой вычислительной машине, позволяют оценить влияние параметров контура на длительность и качество процесса самонастройки.

Ил. 3. Библиогр. 2.