УДК 62—505

Е. Я. ИВАНЧЕНКО,
д-р техн. наук,
В. Д. ДОМРИН

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ МНОГОСВЯЗНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Рассматривается задача синтеза оптимальных управлений многосвязными объектами, подверженными случайным возмущениям. Объекты описываются уравнением

$$\dot{X} + AX = DU + \mathrm{H}, \tag{1}$$

где числовые матрицы A и D имеют соответственно размеры $n \times n$, $n \times r$, H — n-мерный вектор случайных возмущений Ограничивающие условия, накладываемые на синтезируемые управления, заключаются в ограничениях по модулю

$$|u_j| \leqslant k_j \ (j = 1,\ 2,\ \ldots\ r)$$

и ограничениях «расходов сигналов» управления

$$\sum_{j=1}^{r} k_j \int_0^\infty M \left| \sum_{i,\ k=1}^{n} d_{ij} \gamma_{ik} x_k \right| dt = C\,[x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)].$$

Из указанного класса управлений необходимо выбрать такие $u(x)$, которые минимизировали бы функционал

$$I = M \int_0^\infty \sum_{i,\,k=1}^{n} \beta_{ik} x_i x_k dt = M \int_0^\infty XT\mathrm{B}X dt. \qquad (2)$$

Если в уравнении (1) произвести замену

$$DU = V, \qquad (3)$$

то согласно [1] можно найти оптимальные управления в виде

$$v_i = - k_i \operatorname{sign} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} x_k. \qquad (4)$$

Постоянные коэффициенты γ_{ik} определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$\Gamma A + AT\Gamma = B. \qquad (5)$$

Для определения истинных оптимальных управлений U необходимо решить систему уравнений (3), решение которой при управлениях (4) является сложной задачей. Поэтому в данной статье предлагается другой подход, который заключается в том, что не следует вводить замену (3).

Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} \gamma_{ik} x_i x_k = XT\Gamma X, \ \gamma_{ik} = \gamma_{ki}.$$

Производная по времени этой квадратичной формы с учетом уравнения (1) при $\mathrm{H} = 0$ равна

$$\frac{d}{dt}(XT\Gamma X) = 2(DU)T\Gamma X - XT(\Gamma A + AT\Gamma)X. \qquad (6)$$

Далее, зададим определенно положительную квадратичную форму

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} \beta_{ik} x_i x_k = XT\mathrm{B}X, \ \beta_{ik} = \beta_{ki}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение (5), тогда уравнение (6) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}(XT\Gamma X) = 2(DU)T\Gamma X - XT\mathrm{B}X. \qquad (7)$$

Проинтегрировав равенство (7) в пределах от 0 до ∞ и учтя, что для устойчивого стационарного объекта свободное движение с течением времени затухает, получим

$$\int_0^\infty XT\mathrm{B}X dt = XT(0)\Gamma X(0) + 2\int_0^\infty (DU)T\Gamma X dt. \qquad (8)$$

Запишем минимизируемый функционал (2) с учетом (7) в скалярной форме

$$I = M\left[\sum_{i,\,k=1}^{n} \gamma_{ik} x_i(0) x_k(0)\right] + 2M\int_0^\infty \left[u_1 \sum_{k=1}^{n} (d_{11}\gamma_{1k} + \right.$$

$$+d_{21}\gamma_{2k}+\ldots+d_{l1}\gamma_{lk}+\ldots+d_{n1}\gamma_{nk})\,x_k+\ldots+u_l\sum_{k=1}^{n}\times$$

$$\times(d_{1l}\gamma_{1k}+d_{2l}\gamma_{2k}+\ldots+d_{ll}\gamma_{lk}+\ldots+d_{nl}\gamma_{nk})\,x_k+\ldots+$$

$$\ldots+u_z\sum_{k=1}^{n}(d_{1r}\gamma_{1k}+d_{2r}\gamma_{2k}+\ldots+d_{ir}\gamma_{ik}+\ldots+$$

$$\left.+d_{nr}\gamma_{nk})\,x_k\right]dt.$$

Полученное уравнение запишем в виде

$$I=M\left[\sum_{i,\,k=1}^{n}\gamma_{ik}x_i(0)\,x_k(0)\right]+2M\int_0^\infty\sum_{j=1}^{z}u_j\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{n}d_{ij}\gamma_{ik}dt, \qquad (9)$$

откуда легко получить оптимальные управления

$$u_j=-k_j\,\mathrm{sign}\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{n}d_{ij}\gamma_{ik}. \qquad (10)$$

Постоянные коэффициенты γ_{ik} определяются той же системой линейных алгебраических уравнений (5), которая в скалярной форме имеет вид

$$\sum_{p=1}^{n}(a_{pk}\gamma_{ip}+a_{pi}\gamma_{kp})=\beta_{ik},\ (i,k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (11)$$

Для объектов высокого порядка решение системы (11) затруднительно, поэтому можно применять интегральные квадратичные оценки весовых функций объекта [2, 3].

Рассмотрим действия возмущающих воздействий H на установившийся режим объекта (1). В этом случае уравнение (7) запишем

$$\frac{d}{dt}\sum_{i,\,k=1}^{n}\gamma_{ik}x_ix_k=-\sum_{i,\,k=1}^{n}\beta_{ik}x_ix_k+$$

$$+2\left[\sum_{j=1}^{r}u_j\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{n}d_{ij}\gamma_{ik}+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ik}x_k\right],$$

откуда при оптимальных управлениях (10) имеем

$$\frac{d}{dt}\sum_{i,\,k=1}^{n}\gamma_{ik}x_ix_k=-\sum_{i,\,k=1}^{n}\beta_{ik}x_ix_k-$$

$$-2\left[\sum_{j=1}^{r}k_j\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{n}d_{ij}\gamma_{ik}\right|-\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}x_k\right].$$

Таким образом, при оптимальных управлениях (10) и при соблюдении неравенства

$$\sum_{j=1}^{r}k_j\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{n}d_{ij}\gamma_{ik}\right|>\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{k=1}^{n}\eta_{ik}x_k$$

возмущающие воздействия, H_i, приложенные к объекту, не будут вызывать отклонений фазовых координат. Если дифференциальные уравнения объекта записаны в относительных единицах, то $|u_j| \leqslant 1$. В этом случае получим условия невозмущаемости объекта (1) при оптимальных управлениях

$$u_j = -\operatorname{sign} \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\gamma_{ik}$$

в виде

$$|\eta_i| \leqslant d_{i1} + d_{i2} + \ldots + d_{ir}. \tag{12}$$

Следует отметить, что, используя методику [1, 3], полученные результаты можно применить к нестационарным многосвязным, а также к нейтральным объектам.

В качестве примера рассмотрим процесс флотаций угля, представленный при некоторых допущениях многосвязным стохастическим объектом [4]:

$$\dot{X} + AX = DU + \mathrm{H}, \tag{13}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} \\ 0 & 0 \\ d_{41} & d_{42} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \\ 0 \\ \eta_4 \end{bmatrix}.$$

Необходимо синтезировать управления $u_j (j = 1, 2)$, минимизирующие функционал

$$I = \int_0^\infty M \sum_{i=1}^{4} \beta_{ii} x_i^2 dt,$$

управления должны удовлетворять ограничениям

$$|u_j| \leqslant 1, \; 2\int_0^\infty M \left| \sum_{i,\,k=1}^{4} \gamma_{ik} x_k \right| dt = C. \tag{14}$$

В данном случае уравнение (9) с учетом возмущений имеет вид

$$I = \int_0^\infty M \sum_{i=1}^{4} \beta_{ii} x_i^2 dt = M\left[\sum_{i,\,k=1}^{4} \gamma_{ik} x_i(0)\, x_k(0)\right] +$$

$$+ 2M \int_0^\infty \left[u_1 \sum_{k=1}^{4} (d_{21}\gamma_{2k} + d_{41}\gamma_{4k})\, x_k + u_2 \sum_{k=1}^{4} (d_{22}\gamma_{2k} + \right.$$

$$\left. + d_{42}\gamma_{4k})\, x_k + \eta_2 \sum_{k=1}^{4} \gamma_{2k} x_k + \eta_4 \sum_{k=1}^{4} \gamma_{4k} x_k \right] dt$$

Минимум данного функционала при (14) будет иметь место при управлениях вида

$$u_1 = -\operatorname{sign} \sum_{k=1}^{4} (d_{21}\beta_{2k} + d_{41}\beta_{4k})\, x_k,$$

$$u_2 = -\operatorname{sign} \sum_{k=1}^{4} (d_{22}\beta_{2k} + d_{42}\beta_{4k})\, x_k.$$

Решая систему (11), находим коэффициенты $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$

$$\gamma_{11} = -\frac{a_{22}^2 + a_{21}^2 - a_{12}a_{21}}{2a_{12}a_{21}a_{22}}, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{2a_{21}}, \quad \gamma_{22} = \frac{1 - \frac{a_{12}}{a_{21}}}{2a_{22}},$$

$$\gamma_{33} = -\frac{a_{44}^2 + a_{43}^2 - a_{34}a_{43}}{2a_{34}a_{43}a_{44}}, \quad \gamma_{34} = \frac{1}{2a_{43}}, \quad \gamma_{44} = \frac{1 - \frac{a_{34}}{a_{43}}}{2a_{44}},$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{14} = \gamma_{23} = \gamma_{24} = 0.$$

Для параметров системы (13), описывающей флотопроцесс $a_{12} = -1$; $a_{21} = 0{,}0166$; $a_{22} = 0{,}266$; $a_{34} = -1$; $a_{43} = 0{,}0399$; $a_{44} = 0{,}4$; $d_{21} = 0{,}0152$; $d_{22} = 0{,}0598$; $d_{41} = 0{,}0078$; $d_{42} = 0{,}0244$; получены оптимальные управления

$$u_1 = -\operatorname{sign}(0{,}458x_1 + 1{,}75x_2 + 0{,}098x_3 + 0{,}254x_4), \qquad (15)$$

$$u_2 = -\operatorname{sign}(1{,}801x_1 + 6{,}884x_2 + 0{,}306x_3 + 0{,}795x_4).$$

Условия невозмущаемости (12) при оптимальных управлениях имеют вид

$$|\eta_2| \leqslant d_{21} + d_{22}, \; |\eta_4| \leqslant d_{41} + d_{42}.$$

Случайные возмущения удовлетворяют условию дельта-коррелированности [5], т. е.

$$M\eta_i(t) = 0, \; M\eta_i(t)\eta_i(t+\tau) \approx B_i\delta(\tau),$$

где

$$B_2 = 2\pi G_{\eta_2\eta_2\text{ср}} = 2 \cdot 10^{-4},$$

$$B_4 = 2\pi G_{\eta_4\eta_4\text{ср}} = 2{,}96 \cdot 10^{-5}.$$

Следовательно, случайные возмущения η_i при оптимальных управлениях (15) не будут вызывать отклонений зольности концентрата, флотохвостов и их производных от невозмущенного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский А. А.* Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. М., «Машиностроение», 1969. 240 с.
2. *Красовский А. А.* Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем. — «Автоматика и телемеханика», 1967, № 10, с. 53—71.
3. *Красовский А. А.* Статическая теория переходных процессов в системах управления. М., «Наука», 1968. 240 с.
4. *Салыга В. И., Хаджиков Н. Р.* Решение задачи идентификации стационарных управляемых объектов обогатительной технологии. — Zbornik Radova Jurema, Svezak I, Zagreb, 1970, с. 145—155.
5. *Иванченко Е. Я., Салыга В. И., Домрин В. Д.* О возможности аппроксимации возмущающих воздействий процесса флотации дельта-коррелированным случайным сигналом. — «Приборы и системы автоматики». Вып. 28, 1973, с. 95—97.

УДК 62—505

Синтез оптимальных управлений многосвязных стохастических объектов. Иванченко Е. Я., Домрин В. Д. Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 11—15.

С использованием метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов рассматривается задача синтеза оптимальных управлений многосвязных объектов, подверженных случайным возмущениям. Синтезируемые управления ограничены по модулю и по «расходам сигналов» управления. Изучаются вопросы невозмущаемости системы управления под действием случайных возмущений. Приведен пример.

Библиогр. 5.