УДК 519.47

А. В. ГОРЕЛЫЙ,
канд. техн. наук

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕЗЕРВОВ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Конфликтная ситуация в экономике, как правило, исчерпывается не сразу. Игроки, предвидя развязку конфликта, пытаются использовать имеющиеся в их распоряжении время и резервы для обеспечения благоприятных условий, в которых будет протекать игра. Мероприятия, направленные на создание таких условий, состоят для каждого игрока в повышении эффективности своих стратегий. Этого можно достичь за счет резервов, которыми располагают игроки и могут распоряжаться по своему усмотрению.

Описанная ситуация представляет собой двухэтапную игру. Первый этап заключается в распределении резервов между мероприятиями, направленными на улучшение тех или иных стратегий с учетом выигрыша, полученнного в результате реализации второго этапа игры, т. е. реализации конфликтной обстановки, сложившейся после того, как будут израсходованы все резервы. Эту же задачу можно трактовать как игру в игре, и мы условно назовем первый этап (распределение резервов) первичной игрой, а второй — (реализацию окончательно сложившейся обстановки)— вторичной игрой.

Поэтапная конструкция задачи подсказывает подход к решению, который должен быть аналогичен методу динамического программирования, т. е. сперва решается вторичная игра, затем первичная, в результате чего получается оптимальное значение платы, и только после этого выясняется оптимальное поведение.

В данной работе решается следующая задача: максимизирующий игрок A обладает резервом X, а минимизирующий B — резервом Y; вторичная игра является игрой 2×2, и игрок A использует количество x резерва на улучшение своей первой стратегии и $X - x$ — на улучшение второй. Аналогично игрок B дробит свой резерв на y и $Y - y$. До распределения резервов платежная матрица игры имеет стандартный вид (рис. 1, *а*), после распределения и использования этих резервов — вид, представленный на рис. 1, *г*. Использование резервов игроком A приводит к увеличению элементов платежной матрицы, прямо пропорциональному вложенным ресурсам (коэффициенты пропорциональности представлены матрицей на рис. 1, *б*). Аналогично использование ресурсов B приводит к уменьшению элементов платежной матрицы.

Таким образом, первичная игра является бесконечной игрой, стратегией A является $0 \leqslant x \leqslant X$, стратегией B — $0 \leqslant y \leqslant Y$. Плата определяется оптимальным решением вторичной игры. Предположим, что в первичной игре обоим игрокам известно поведение противника, т. е. задача является игрой с полной информацией.

а

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	a'	b'
A_2	c'	d'

б

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	α_1	α_2
A_2	α_3	α_4

в

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	β_1	β_2
A_2	β_3	β_4

г

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	$a = a' + \alpha_1 x - \beta_1 y$	$b = b' + \alpha_2 x - \beta_2 (Y - y)$
A_2	$c = c' + \alpha_3 (X - x) - \beta_3 y$	$d = d' + \alpha_4 (X - x) - \beta_4 (Y - y)$

д

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	4	2
A_2	1	3

е

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	0,8	0,5
A_2	0,4	0,6

ж

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	0,4	0,6
A_2	0,6	0,3

з

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	$4 + 0{,}8x - 0{,}4y$	$2 + 0{,}5x - 0{,}6 (Y - y)$
A_2	$1 + 0{,}4 (X - x) - 0{,}6y$	$3 + 0{,}6 (X - x) - 0{,}3 (Y - y)$

Рис. 1.

Решение вторичной игры с платежной матрицей (см. рис. 1, *г*) осложняется тем, что элементы этой матрицы представляют собой функции объема резервов и предшествующего поведения. В зависимости от этих факторов игра будет иметь седловую точку или нет, т. е. ценой игры будет либо a, b, c, d при наличии седловой точки, либо

$$\nu = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}. \tag{1}$$

Рассмотрим последний случай, т. е. предположим, что X и Y имеют значения, позволяющие осуществить ситуацию (1). Игрок A максимизирует ν при помощи выбора оптимального управления x^*, игрок B минимизирует ν при помощи y^*. Исследование на экстремум (1) приводит к двум уравнениям относительно x^* и y^*:

$$\begin{gathered}(d-c)\left[\alpha_1(d-b)+\alpha_2(a-c)\right]-(a-b)\left[\alpha_3(d-b)+\right.\\ \left.+\alpha_4(a-c)\right]=0,\\ (d-c)\left[\beta_1(d-b)-\beta_2(a-c)\right]-\\ -(a-b)\left[-\beta_3(d-в)+\beta_4(a-c)\right]=0.\end{gathered} \tag{2}$$

Вторые частные производные от цены игры ν по x и y при оптимальных значениях x^* и y^* имеют вид

$$\nu''_x = 2\,\frac{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4}{a + d - b - c};$$

$$\nu''_y = 2\,\frac{\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4}{a + d - b - c},$$

ν как функция x и y представляет собой гиперболоид, который в зависимости от параметров, входящих в (1), той или иной своей частью попадает в допустимую область изменения аргументов (x и y). Если $\nu''_x > 0$ или $\nu''_y < 0$, то решение достигается на границе изменения x или y соответственно, если же $\nu''_x < 0$ и $\nu''_y > 0$, то ν (как функция x и y, т. е. плата в первичной игре) имеет седловую точку, в которой, возможно, и достигается решение. Рассмотрим последний, наиболее интересный случай.

Уравнения (2) могут быть преобразованы к виду

$$\frac{d-b}{a-c} = z, \ \frac{d-c}{a-b} = k \tag{3}$$

при условии

$$\begin{gathered}(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)z^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_1\beta_4 + \alpha_4\beta_1)z -\\ -(\alpha_2\beta_4 + \alpha_4'\beta_2) = 0,\\ k = \frac{\alpha_3 z + \alpha_4}{\alpha_1 z + \alpha_2} = \frac{-\beta_3 z + \beta_4}{\beta_1 z - \beta_2}.\end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом, можно сформулировать следующее условие оптимальности: если во вторичной игре 2×2 нет седловой точки, а в первичной игре распределения запасов с полной информацией она достигается, то отношения разностей диагональных элементов платежной матрицы и соседних с ними элементов инвариантны по отношению к размерам резервов (условия (3)) и определяются матрицами коэффициентов эффективностей использования ресурсов (условия (4)).

Равенства (3) легко преобразуются в систему двух линейных алгебраических уравнений относительно x^* и y^*, которые, следовательно, могут быть линейно выражены через X и Y. Чтобы выяснить область существования x^* и y^*, можно построить границу этой области, положив x^*, y^* равными 0 и X, Y соответственно. Оптимальные значения управлений x^*, y^* можно использовать для получения цены игры. Для этого предварительно преобразуем (1) с учетом (2) и получим выражения для ν в виде

$$\nu^* = \frac{\alpha_1 d - \alpha_4 a - \alpha_2 c + \alpha_3 b}{\alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{\beta_1 d - \beta_4 a + \beta_4 c - \beta_3 b}{\beta_1 - \beta_4 + \beta_2 - \beta_3}. \tag{5}$$

Подставляя x^* и y^* в (5), получим ν^* как линейную функцию резервов X и Y При этом линии равной цены игры образуют семейство параллельных прямых.

Наряду с описанным поведением, когда игроки стремятся образовать платежную матрицу вторичной игры без седловой точки, необходимо рассмотреть другое поведение, когда размеры резервов позволяют им выйти на седловую точку. При таком поведении один игрок расходует все свои ресурсы на улучшение одной из стратегий, а второй игрок имеющимися в его распоряжении ресурсами не в состоянии так изменить платежную матрицу, чтобы ликвидация седловой точки была бы ему выгодна. Сравнивая величину платы при первой и второй линиях поведения, можно выяснить, какая из них выгоднее игроку, способному выйти на седловую точку во вторичной игре.

Анализируя задачу в плоскости резервов, найдем области, в которых A и B выгоднее применять вторую линию поведения. Эти области определяются следующими неравенствами:

$$\text{для } A \begin{cases} a' + \alpha_1 X - \beta_1 Y > \nu^*, \\ b' + \alpha_2 X - \beta_2 Y > \nu^* \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} c' + \alpha_3 X - \beta_3 Y > \nu^* \\ d' + \alpha_4 X - \beta_4 Y > \nu^*. \end{cases} \tag{6}$$

$$\text{Для } B \begin{cases} a' + \alpha_1 X - \beta_1 Y < \nu^* \\ c' + \alpha_3 X - \beta_3 Y < \nu^* \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} b' + \alpha_2 X - \beta_2 Y < \nu^*, \\ d' + \alpha_4 X - \beta_4 Y < \nu^*, \end{cases} \tag{7}$$

а границы этих областей — четырьмя равенствами:

$$\begin{aligned} a' + \alpha_1 X - \beta_1 Y - \nu^* &= 0, \\ b' + \alpha_2 X - \beta_2 Y - \nu^* &= 0, \\ c' + \alpha_3 X - \beta_3 Y - \nu^* &= 0, \\ d' + \alpha_4 X - \beta_4 Y - \nu^* &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Две области (6), как и две области (7), могут пересекаться (см. рис. 2). Тогда возникает вопрос об оптимальном поведении в общей части перечисленных областей, решить который можно путем сравнения платы при использовании граничных значений управлений x^* или y^*. Так, в численном примере (условия см. на рис. 1, д—з) в общей части областей (6) $a - d > 0$, следовательно, A будет применять стратегию $x = X$, а в общей части областей (7) $B - y = Y$. Линии равной цены игры в рассматриваемых областях образуют семейства параллельных прямых.

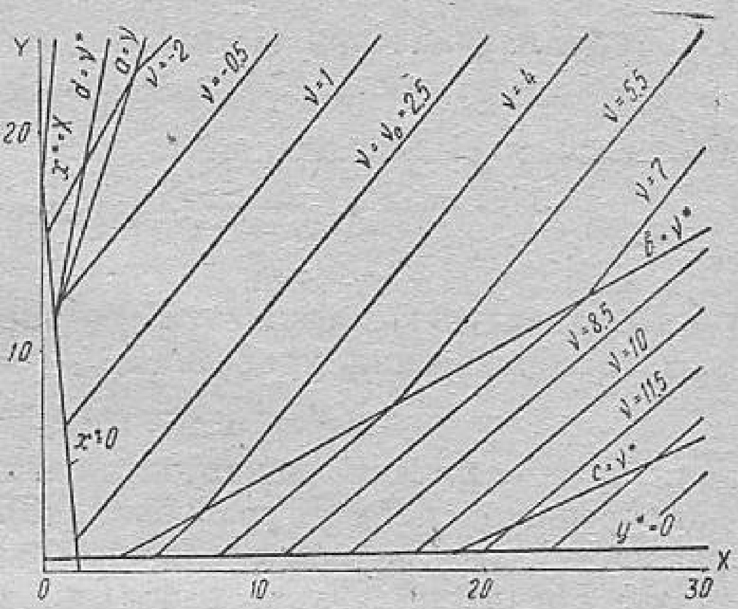

Рис. 2.

В той части пространства (X, Y), где x^*, удовлетворяющее (2), отрицательно или больше X, поведение B определяется вторым из уравнений (2), а полное исследование поведения B идентично описанному выше. Аналогично в области, которая на рис. 2 примыкает к оси абсцисс, поведение A определяется первым из уравнений (2).

УДК 519.47

К вопросу о распределении резервов в условиях конфликтной ситуации *Горелый А. В.* Сб. «Автоматизированные системы управления и приборы автоматики», вып. 34, 1975, с. 7—11.

В предвидении будущего конфликта два полностью информированных игрока выбирают оптимальное поведение при распределении своих резервов для повышения эффективности своих стратегий. Результат использования резервов влияет на цену игры при реализации конфликта. Для случая игры 2×2 предложена методика построения оптимального распределения резервов и линий равной цены игры. Приводится пример.

Ил. 2.