УДК 519.7

А.Н. ГВОЗДИНСКИЙ, Н.А. ЯКИМОВА, В.А. ГУБИН

О ВОЗМОЖНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ МАТРИЦ ЛИНЕЙНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Показывается возможность представления матриц линейных логических операторов по аналогии с другими формами, такими, как графическая интерпретация логических пространств и описание с помощью бинарных предикатов. По результатам проведенных исследований предлагаются различные формы представления матриц линейных логических операторов. Рассматриваются примеры представления матриц линейных логических операторов.

1. Введение

Устоявшиеся представления о математической логике как о науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики, главным образом, для нужд самой математики, в современных условиях становится слишком узким [1]. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а ее главная задача – структурное моделирование таких систем. Человеческий язык, как явление дискретное, естественно должен описываться средствами дискретной математики.

Для описания естественного человеческого языка лучше всего подошел бы аппарат уравнений, подобный аппарату, используемому в математическом анализе, но отличающийся от последнего тем, что он предназначен для формализации не непрерывных, а дискретных процессов. Такой язык дают логические исчисления, а именно: исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако чтобы иметь возможность эффективно решать указанные уравнения, необходимо довести эти исчисления до уровня алгебраической системы [2, с.54]. В классической линейной алгебре широко используется аппарат матриц. Но мы имеем возможность записывать только двухмерные матрицы, не говоря уже о громоздкости этой записи, возрастающей по мере увеличения размерности матриц.

Актуальность исследования. С учетом особенностей логической алгебры становится возможным разработать методы представления булевых матриц, сокращающие их запись, а также допускающие отсутствие ограничений на арность матриц. Эти методы изложены в [3] и в данной статье.

2. Методы решения

Возьмем в качестве поля логических скаляров множество $G = \{0, 1\}$. В качестве логических векторов рассмотрим множество конституент единицы по m переменным. Такое логическое пространство будем называть *булевым*. В то же время систему всех конечных предикатов арности m, заданных на декартовом произведении $K = K_1 \times \ldots \times K_m$, $|K_i| = k_i$, можно рассматривать как логическое пространство. Множество K_i является алфавитом, на котором задан аргумент x_i рассматриваемых предикатов. Полем логических скаляров для такого пространства может служить любая система всех конечных предикатов арности $n < m$. Однако алфавитами и для аргументов предикатов поля скаляров, и для аргументов предикатов множества векторов такого логического пространства должны служить одни и те же множества. Построенное таким образом пространство назовем предикатным логическим пространством или пространством t-местных предикатов над скалярным полем n-местных предикатов [3].

Рассмотрим пример логического пространства. В качестве поля логических скаляров возьмем множество P всех одноместных предикатов $P_i(x)$, ($i = 0, \ldots, 3$), определенных на множестве $K = \{0, 1\}$. Множество таких предикатов задано табл. 1.

Таблица 1

x	P_0	P_1	P_2	P_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Далее одноместные предикаты представляются строками $P = (P(0), P(1))$. Тогда $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$. Обозначим это скалярное поле через p. Тогда, например, логическая матрица [4] будет иметь вид:

$$P_1 \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

В качестве пространства логических векторов [5] возьмем множество двухместных предикатов $Q_j(x, y)$, $j = 0, \ldots, 15$, определенных на декартовом произведении $K^2 = \{0, 1\}^2$. Множество таких векторов, заданное табл. 2, будем записывать в виде матриц $Q_j = \begin{pmatrix} Q_j(0,0) & Q_j(1,0) \\ Q_j(0,1) & Q_j(1,1) \end{pmatrix}$.

Таблица 2

x	y	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	Q_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Согласно определению операции дизъюнкции векторов и операции умножения вектора на скаляр, для векторов такого пространства

$$Q_i \vee Q_j = \begin{pmatrix} Q_i(0,0) \vee Q_j(0,0) & Q_i(1,0) \vee Q_j(1,0) \\ Q_i(0,1) \vee Q_j(0,1) & Q_i(1,1) \vee Q_j(1,1) \end{pmatrix},$$

$$P_i Q_j = \begin{pmatrix} P_i(0) Q_j(0,0) & P_i(1) Q_j(1,0) \\ P_i(0) Q_j(0,1) & P_i(1) Q_j(1,1) \end{pmatrix}.$$

Нулевые и единичные элементы в этом случае имеют вид: $0 = P_0$, $0 = Q_0$, $1 = P_3$, $1 = Q_{15}$. Обозначим это пространство через Q. Это пространство является полным. Приведем пример комбинации векторов Q_1 и Q_5:

$$P_0 Q_1 \vee P_2 Q_5 = (0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_4 .$$

Вычислим размерность p описанного выше совершенного предикатного пространства. Множество логических скаляров для описанного предикатного пространства будет иметь мощность $2^{k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_n}$, а количество векторов, составляющих рассматриваемое предикатное пространство, будет равно $2^{k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_m}$ [6]. Согласно определению, любой вектор совершенного логического пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Число таких комбинаций будет равно $(2^{k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_n})^p$. С другой стороны, как было сказано выше, это число равно $2^{k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_m}$. Следовательно, имеет место равенство $2^{k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_m} = (2^{k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_n})^p$, откуда, логарифмируя обе части этого равенства по основанию 2, находим число базисных векторов описанного выше совершенного предикатного пространства:

$$p = k_{n+1}k_{n+2} \cdot \ldots \cdot k_m . \tag{1}$$

Если же $|K_1| = \ldots = |K_m| = k$, то

$$p = k^{m-n} . \tag{2}$$

Рассмотрим предикатное пространство Q. Алфавитом в указанном пространстве служит множество $K^3 = \{0,1\}^3$. Очевидно, что $k = 2$, $n = 1$, $m = 2$. Количество логических скаляров в этом примере равно четырем, а векторов - шестнадцати. Размерность этого пространства равна $2^{2-1} = 2$.

В силу того, что векторы булева пространства можно понимать как множество конституент единицы по *m* переменным, число векторов булева пространства равно 2^m. Поле логических скаляров для булева пространства содержит два элемента: ноль и единицу. Следовательно, справедливо соотношение $2^p = 2^m$, где p – размерность булева пространства, т.е. количество его базисных векторов. Очевидно, что

$$p = m \cdot \tag{3}$$

Следует отметить, что в булевом пространстве существует единственный с точностью до перестановки набор векторов, который может служить базисом выбранного пространства, тогда как в предикатном логическом пространстве это не так.

В силу равенства (3), для булевых пространств любой матрице над полем $G = \{0,1\}$ отвечает некоторый линейный логический оператор. Для предикатных пространств это не так. В случае таких пространств на размерность матриц, соответствующих линейным логическим операторам, накладывается следующее ограничение. Допустим, что некоторая логическая матрица $A_{q \times p}$ над полем логических скаляров, элементами которого являются конечные предикаты арности n, представляет собой матрицу некоторого логического оператора A, переводящего векторы предикатного пространства W размерности p в векторы предикатного пространства V размерности q. В силу равенства (1), для p и q должны выполняться следующие соотношения:

$$p = k_{m_p - n} \cdot \ldots \cdot k_{m_p} , \tag{4}$$

$$q = k_{m_q - n} \cdot \ldots \cdot k_{m_q} , \tag{5}$$

где m_p и m_q – арности предикатов, представляющих собой векторы пространств W и V соответственно. Следовательно, множество матриц линейных логических операторов в предикатном пространстве является подмножеством множества всех логических матриц над предикатным скалярным полем. Мощность этого подмножества для каждых конкретных пространств прообразов W и пространства образов V равна $(2^{k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_n})^{pq}$, где p и q – размерности пространств W и V соответственно. В случае $k_1 = \ldots = k_m = k$, как следует из (2), соотношения (4) и (5) принимают вид

$$p = k^{m_p - n} , \tag{6}$$

$$q = k^{m_q - n} , \tag{7}$$

т.е. когда мощности алфавитов, над которыми заданы аргументы предикатов, являющихся элементами рассматриваемого логического пространства, равны, указанная выше логическая матрица $A_{q \times p}$ является матрицей описанного линейного логического оператора в том и только в том случае, когда количество ее строк и количество ее столбцов представляют собой некоторую целую степень числа k. Мощность множества матриц линейных логических операторов в этом случае равна $2^{k^n pq}$.

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) \end{pmatrix}$$

над полем одноместных предикатов над алфавитом $K = \{0,1\}$ не соответствует ни одному линейному логическому оператору, так как число ее строк равно трем, а $k = 2$. Матрица же

$$B = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (1,1) & (1,0) \\ (1,0) & (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}$$

соответствует линейному логическому оператору B, переводящему векторы предикатного пространства W размерности 4 в векторы предикатного пространства V размерности 2. Учитывая соотношения (6) и (7), а также то, что $k = 2$, а $n = 1$, находим, что арность предикатов, представляющих собой векторы пространства образов V, равна $m_q = 2$, а арность предикатов, представляющих собой векторы пространства прообразов W, равна $m_p = 3$.

Таким образом, в случае рассмотрения матриц, представленных в бинарнопредикатном виде [7], можно утверждать, что любая такая матрица является матрицей некоторого логического оператора в силу того, что представление с помощью бинарных предикатов является формой записи булевых матриц.

3. Выводы

В ходе исследований, изложенных в статье, была показана возможность представления матриц линейных логических операторов по аналогии с другими формами, такими, как графическая интерпретация логических пространств и описание с помощью бинарных предикатов.

Научная новизна: по результатам проведенных исследований предложены различные формы представления матриц линейных логических операторов.

Практическая значимость: рассмотренные в статье возможные методы описания матриц линейных логических операторов позволяют упростить их компьютерное моделирование.

Список литературы:. **1**. *Сигорский В.П.* Математический аппарат инженера. Киев: Техника. 1975. 768с. **2**. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. Харьков: Вища школа. 144с. **3**. *Гвоздинская Н.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Предикатные логические пространства // Сб. науч. тр. по материалам 4-й международной конференции “Теория и техника передачи, приема и обработки информации. (Новые информационные технологии)”. Туапсе: ХТУРЕ. 1998. С.239. **4**. *О* логических матрицах./ Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // Проблемы бионики. 1998. Вып. 48. С. 12 - 22. **5**. *О* логических пространствах./ Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // АСУ и ПА. 1997. Вып. 106. С. 21 - 30. **6**. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Неполные и полные логические пространства. // Проблемы бионики. 1991. Вып.46. С.10-17. **7**. *Гвоздинский А.Н., Якимова Н.А., Губин В.А.* Представление булевых логических матриц в виде бинарных предикатов // Радиоэлектроника и информатика. 2007. Вып 2. С. 108 – 110. **8**. *Гвоздинский А.Н., Якимова Н.А., Губин В.А.* Бинарное предикаты при описании булевых логических пространств // АСУ и ПА. 2012. Вып. 161. С. 108 - 118.

Поступила в редколлегию 12.09.2015

Гвоздинський Анатолий Николаевич, канд. техн. наук, профессор кафедры искусственного интеллекта ХНУРЕ. Научные интересы: методы оптимизации в организационном управлении. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина 14, тел. 70-21-337.

Якимова Наталья Анатольевна, канд. техн. наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и дискретной математики Одесского национального университета им.И.И. Мечникова. Научные интересы: логическая алгебра, искусственный интеллект. Адрес: Украина, 65001, Одесса-001, ул.Дворянская, тел.: 8(048)7238405.

Губин Вадим Александрович, старший преподаватель кафедры искусственного интеллекта ХНУРЕ. Научные интересы: интеллектуальный анализ текстовых данных. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина 14, тел. 70-21-337.