Heavens O.S. Measurement of the Optical Constants of Thin Films // CRC Press. 1995. 195 p. 4. *Carroll F., Joseph H., Oxley, Blocher J. M.* Powell Vapor Deposition. The Electrochemical Society series //New York: Wiley, 1966. 158 p. 5. *Mattox* Handbook of Physical Vapor Deposition (PVD) Processing: Film Formation, Adhesion, Surface Preparation and Contamination Control / Mattox, M. Donald // Westwood, N.J.: Noyes Publications, 1998. 944 p. 6. *Mahesh Gowda, N.M., Kiran, Y. and Parthasarthy, S.S.* Modelling of buck DC-DC converter using Simulink // International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. July. Vol. 3. No. 7. P. 14965-14975. 7. *Horovits P., Hill W.* The Art of Electronics. -Moscow: Mir, 1995. 154 p. 8. *Steve Roberts.* DC/DC book of knowledge / Steve Roberts // RECOM Group Gmunden, 2014. - 234 p. 9. *Mude, N.R. and Sahu, A.* Adaptive control schemes for DC-DC buck converter // International Journal of Engineering Research and Applications. Vol. 2. No. 3. P. 463-467.

Надійшла до редколегії 15.04.2019

Михальов О.І., д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій і систем Національної Металургійної Академії України. Наукові інтереси: сучасні проблеми управління та моделювання складних систем. Адреса: Україна, 49600, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 4.

Зимогляд А.Ю., асистент кафедри інформаційних технологій і систем Національної Металургійної Академії України. Наукові інтереси: вакуумна техніка; тонкоплівкові покриття; автоматизація виробництва; електроніка; високовольтні прилади. Адреса: Україна, 49600, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 4.

Гуда А.І., д-р техн. наук, професор кафедри інформаційних технологій і систем Національної Металургійної Академії України. Наукові інтереси: моделювання та ідентифікація динамічних систем, хаотична динаміка. Адреса: Україна, 49600, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 4.

УДК 519.171 DOI: 10.30837/0135-1710.2019.176.027

В.Л. ШЕРГИН, Д.В. ЛЫМАРЕНКО, М.Р. ПОЛИИТ

МОДЕЛЬ ЭЛАСТИЧНОЙ МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНОЙ НЕОРИЕНТИРОВАННОЙ СЕТИ

Рассматривается модель графа, обладающего разными скоростями относительного прироста числа рёбер и вершин. Такой граф называется эластичным. Рассматриваются свойства показателя эластичности и его связь с фрактальной размерностью. Базовые концепции масштабно-инвариантной сети - роста и преимущественного присоединения - дополняются концепцией эластичности. В результате получена модель эластичной неориентированной масштабно-инвариантной сети. Такой подход позволяет распространить рассматриваемый класс моделей на плотные сети, для которых степени вершин распределены по закону Ципфа или близкому к нему.

1. Введение

Модели масштабно-инвариантных сетей (МИС, SF - scale-free networks) считаются наиболее адекватным отражением свойств сетей реального мира, таких как всемирная паутина, сети цитирования и т.п.[1]. Развитие и применение таких моделей для сетей реального мира является перспективным направлением научных исследований.

Теория масштабно-инвариантных сетей основывается на двух фундаментальных концепциях: концепции роста и концепции преимущественного присоединения [2]. Однако, несмотря на очевидную полезность таких моделей, они имеют определенные недостатки и ограничения. Например, для классических моделей МИС значение показателя распределения степеней вершин превышает два, в то время как существуют такие сети, для которых этот показатель равен двум (что соответствует закону Ципфа) или меньше [3]. Кроме того, существует широкий класс сетей, для которых средняя степень вершин имеет тенденцию к увеличению по мере роста времени наблюдения, но эта зависимость или не рассматривается вообще, или рассматривается как внешний фактор модели. Более того, показатель распределения степеней вершин в классических моделях МИС напрямую зависит от среднего значения этой степени, то есть от параметра, имеющего масштаб. Во избежание указанных ограничений было предложено [4] расширить список базовых концепций (рост и преимущественное присоединение) концепцией различной относительной скорости увеличения количества рёбер и вершин,то есть концепцией эластичности.

В данной работе предлагается модификация модели масштабно-инвариантной сети, построенной с использованием неединичной эластичности.

2. Показатель эластичности графа

Пусть граф $G(V,E)$ изначально содержит две вершины, соединённые ребром. В каждый момент времени к дереву добавляется одна вершина и одно ребро, таким образом, $V(t)=t+1$, $E(t)=t$, $\Delta V(t)=1$; $\Delta E(t)=1$.

Сравним относительные скорости прироста количества вершин $\delta V(t)=\Delta V(t)/V(t)$ и рёбер $\delta E(t)=\Delta E(t)/E(t)$:

$$\delta E(t)=1\cdot\delta V(t-1). \tag{1}$$

Рассмотрим другой крайний случай - полный граф. При тех же начальных условиях ($V(1)=2$, $E(1)=1$) добавляемая вершина соединяется со всеми существующими, то есть $\Delta E(t)=E(t+1)-E(t)=t+1$, $E(t)=t(t+1)/2$. Таким образом, для полного графа

$$\delta E(t)=2\cdot\delta V(t-1). \tag{2}$$

Рассмотренные крайние случаи проиллюстрированы на рис.1.

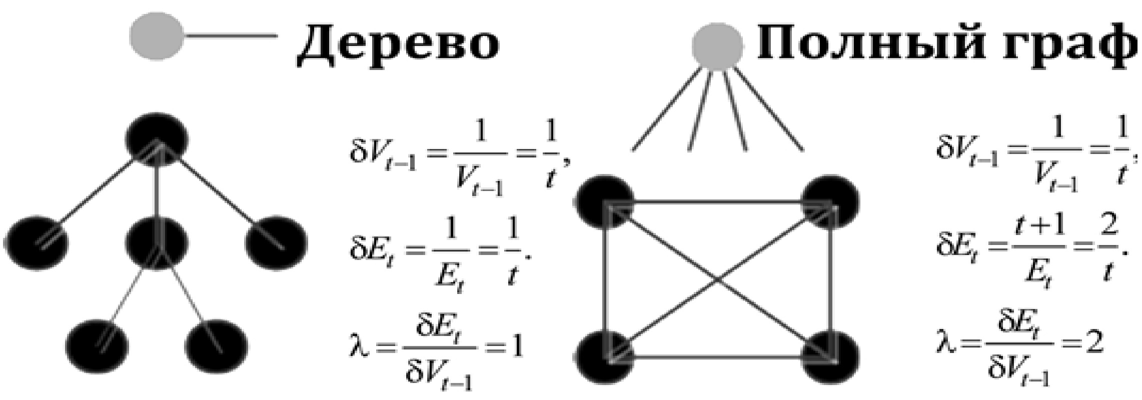

Рис. 1. Соотношения между относительными приростами числа рёбер и вершин

Очевидно, что выражения (1) и (2) можно обобщить на промежуточный случай $1<\lambda<2$:

$$\delta E(t)=\lambda\cdot\delta V(t)\cdot\frac{t+1}{t}==\lambda\cdot\delta V(t-1). \tag{3}$$

Параметр λ является эластичностью, то есть отношением относительного прироста количества рёбер к относительному приросту количества вершин:

$$\lambda=\lim_{t\to\infty}\frac{\delta E(t)}{\delta V(t-1)}. \tag{4}$$

Стоит отметить, что в теории сетей термин "эластичность" применяется в другом смысле - как мера устойчивости сети при удалении узлов [5]. Однако в более общем математическом смысле этот термин широко употребляется именно как отношение относительных скоростей приростов функции и аргумента [4], чем и обосновывается применение этого термина в данной работе.

Одним из важных и полезных приложений понятия эластичности является то, что она устанавливает соответствие между скоростью прироста количества рёбер $\Delta E(t)$ и текущим средним значением этого количества $e(t)$. Если коэффициент эластичности λ фиксирован, а количество вершин служит, как обычно, мерой времени ($\Delta V(t)=1$), то, согласно (3), получим:

$$\Delta E(t) = \lambda \frac{E(t)}{V(t)} \cdot \frac{t+1}{t} \approx \lambda \cdot e(t) . \quad (5)$$

Таким образом, значение $\lambda > 1$ показывает, что каждая новая вершина добавляет в среднем больше ребер, чем имеется в данный момент времени. Следует отметить, что во всех существующих моделях МИС это соотношение равняется единице ($\lambda = 1$).

Из (4)-(5) следует, что количество рёбер в сети составляет

$$E(V) = \frac{\Gamma(V+\lambda-1)}{\Gamma(V-1)\Gamma(\lambda+1)} = \frac{1}{\lambda \cdot \mathrm{B}(V-1,\lambda)} . \quad (6)$$

Можно отметить, что в предельном случае $E(V) \underset{v\to\infty}{\to} CV^{\lambda}$, что соответствует степенному закону распределения.

Очевидно, что коэффициент эластичности можно использовать как безмасштабную меру плотности сети (графа).

Более того, согласно [6], коэффициент эластичности растущей сети является его фрактальной размерностью в том случае, если измерять размер сети количеством вершин, а под единичным множеством понимать ребро.

Так, фрактальная размерность Минковского (box-counting dimension) для растущего объекта, определяется как

$$d = \lim_{R\to\infty} \frac{\log N(R)}{\log R} , \quad (7)$$

где $N(R)$ - количество кубов с единичной стороной, необходимых для покрытия объекта диаметром R.

Согласно правилу Лопиталя, граница растущего объекта (7) в случае существования таковой равна

$$d = \lim_{R\to\infty} \frac{d(\log N(R))}{d(\log R)} = \lim_{R\to\infty} \frac{dN/N}{dR/R} . \quad (8)$$

Для дискретных структур выражение (8) приобретает вид

$$d = \lim_{R\to\infty} \frac{\delta N}{\delta R} . \quad (9)$$

Представляется целесообразным применить концепцию эластичности (то есть различной относительной скорости увеличения количества рёбер и вершин) к модели масштабно-инвариантной сети.

3. Модель эластичной масштабно-инвариантной неориентированной сети

Наиболее известной моделью неориентированной МИС со степенным распределением является модель Барабаши-Альберт (БА), которая основана на следующих правилах: граф является неориентированным; начальное количество вершин и рёбер ограничено; на каждом шаге к графу добавляется одна новая вершина (концепция роста), которая связана с существующими; концы добавляемых рёбер (то есть связи) распределяются между имеющимися вершинами в соответствии с правилом преимущественного присоединения: вероятность того, что новое ребро инцидентно некоторой вершине i, пропорциональна её степени k_i [2].

Предположим, что начальный граф состоит из двух вершин и одного ребра. Обозначим количество вершин, имеющих степень k, как $V(k,t)$, их общее количество в данный момент времени t как $V(t)$, а общее количество рёбер как $E(t)$. Рассматривая процесс добавления дуг как процесс Бернулли, получим балансовое уравнение

$$V(k,t+1) = V(k,t) + m(t)\left(-w(k,t) + w(k-1,t)\right) , \quad (10)$$

где $w(k)$ - вероятность того, что новое ребро соединяется с некоторой вершиной степени k:

$$w(k)=\frac{k}{2m}p(k)\ . \qquad (11)$$

Согласно (5), если коэффициент эластичности отличен от единицы, то среднее число дуг $m(t)$, которые добавляются в сеть, будет зависеть от текущего количества рёбер и будет расти с течением времени. В этом проявляется отличие предлагаемой модели от классической (то есть БА-модели).

Уравнение (10) имеет асимптотически стационарное решение $V(k,t)=t\cdot p_k$, причём из (5) и (11) следует, что вероятности распределения степеней вершин p_k удовлетворяют уравнению

$$p_k=\frac{\lambda}{2}\left(-kp_k+(k-1)p_{k-1}\right)\ . \qquad (12)$$

Из (12) следует, что степени вершин распределяются по закону Юла-Саймона, который является дискретным аналогом степенного закона [2] и асимптотически совпадает с ним:

$$p_k=(\theta-1)\mathrm{B}\left(k,\theta\right)=C\frac{\Gamma\left(k\right)}{\Gamma\left(k+\theta\right)}\ , \qquad (13)$$

где $\mathrm{B}(x,y)$, $\Gamma(x)$ - соответственно, бета- и гамма-функции Эйлера.

Показатель распределения (12) (скейлинг-фактор) имеет вид

$$\theta=1+\frac{2}{\lambda}\ . \qquad (14)$$

В то же время, для стандартной БА-модели ($\lambda=1_{+0}$ и $m=const$) этот показатель имеет существенно иной вид:

$$\theta=2+1/m\ . \qquad (15)$$

Из сопоставления (14) и (15) следует, что использование концепции эластичности позволяет применять масштабно-инвариантные модели для сетей, которые имеют показатель распределения степеней вершин, близкий к двум, что соответствует закону Ципфа.

4. Выводы

Рассматривается коэффициент эластичности как безмасштабная мера плотности растущего графа, устанавливающая соотношение между скоростями прироста числа вершин и рёбер. Этот показатель может рассматриваться как фрактальная размерность графа. Представлена модель масштабно-инвариантной неориентированной сети. Использование различных относительных темпов роста количества рёбер и вершин позволяет применять масштабно-инвариантные модели для плотных сетей, что существенно расширяет область применения таких моделей.

Список литературы: 1. *Choromanski, K.; Matuszak, M.; MieKisz, J.* Scale-Free Graph with Preferential Attachment and Evolving Internal Vertex Structure // Journal of Statistical Physics. 2013. № 151 (6). С. 1175-1183. 2. *Albert, R., Barabasi A.-L.* Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 42-97. 3. Newman, M.E.J. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // Contemporary Physics. 2005. No. 46 (5). P. 323-351. 4. *Shergin V.L., Chala L.E.* The concept of elasticity of scale-free networks // Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T). 2017. V. 62. P. 254-258. 5. *Снарский А.А., Ландэ Д.В.* Моделирование сложных сетей. К.: НТУУ «КПИ», 2015. 212 с. 6. *Shergin V.L., Chala L.E., Udovenko S.G.* Fractal dimension of infinitely growing discrete sets // Advanced trends in rsdioelectronics, telecommunications and computer engineering (TCSET-2018) . 2018. No. 348

Надійшла до редколегії 14.01.2019

Шергин Вадим Леонидович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры искусственного интеллекта ХНУРЭ. Научные интересы: интеллектуальный анализ данных, хаос и фракталы. Адрес: Украина, 61166, г. Харьков, пр. Науки, 14. Тел.: (057)702-13-37.

Лымаренко Дмитрий Владимирович, аспирант кафедры искусственного интеллекта ХНУРЭ. Научные интересы: моделирование масштабно-инвариантных сетей. Адрес: Украина, 61166, г. Харьков, пр. Науки, 14. Тел.: (057)702-13-37.

Полиит Максим Русланович, аспирант кафедры искусственного интеллекта ХНУРЭ. Научные интересы: теория графов и ее прикладные аспекты. Адрес: Украина, 61166, г. Харьков, пр. Науки, 14. Тел.: (057)702-13-37.